

В.А. ДАНИЛЕНКО, С.І. СКУРАТИВСЬКИЙ, І.А. СКУРАТИВСЬКА

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, відділення геодинаміки вибуху
(Вул. Б. Хмельницького, 63Г, Київ 01054; e-mail: skurserg@rambler.ru)

АСИМПТОТИЧНІ ХВИЛЬОВІ РОЗВ'ЯЗКИ МОДЕЛІ СЕРЕДОВИЩА З ОСЦИЛЯТОРАМИ ВАН ДЕР ПОЛЯ

УДК 539.182

У роботі розглядається одновимірний математичний модель складного середовища, яка складається із хвильового рівняння для основного середовища та зв'язаних з ним рівнянь Ван дер Поля для коливних включень. Використовуючи метод Боголюбова–Митропольського, побудовані хвильові розв'язки слабконелінійної моделі, амплітуда яких описується тривимірною динамічною системою. Амплітудна система докладно вивчалась методами якісного та числового аналізу. Зокрема, було виявлено існування у фазовому просторі системи періодичних, мультиперіодичних та хаотичних траєкторій, досліджено бифуркації цих режимів за допомогою техніки перерізів Пуанкаре, також було знайдено точні розв'язки у випадку редукції системи до двовимірної.

Ключові слова: нелінійні хвилі, осцилятор Ван дер Поля, хаотичний аттрактор.

1. Вступ

Більшість природних середовищ являють собою ієрархічні утворення структурних елементів, динамікою яких за певних умов навантаження не можна знехтувати [1, 2]. Для опису таких середовищ зі структурною використовується математична модель у вигляді сукупності двох континуумів – основного середовища та, зв'язаних з ним, часткових осциляторів [3, 4]. У роботах [5–7] ці моделі були поширені на нелінійні середовища, у роботах [8, 9] – на нелокальні. В цих роботах нелінійність та нелокальність основного середовища враховувались у його рівняннях стану, тоді як динаміка коливних включень лишалась лінійною. У роботі [10] було запропоновано описувати динаміку коливних включень нелінійними рівняннями, зокрема рівняннями Ван дер Поля. У даній роботі досліджується випадок лінійного основного середовища у поєднанні з нелінійною динамікою осцилюючих включень, які описуються трьо-

ма видами рівнянь Ван дер Поля. Тоді математична модель складного середовища матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \quad \sigma = \frac{E}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + F_k(w_k - u) = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

де u – зміщення основного середовища густини ρ ; σ – напруження; E – модуль пружності Юнга; w_k – зміщення осцилюючого включення густини $m_k \rho$ з власною частотою ω_k ; t та x – часова та просторова змінні.

Оператор F_k , який описує динаміку часткового осцилятора, означимо таким чином $F_k(y) = -(\lambda_k - \mu_k y^2) \frac{\partial y}{\partial t} + \omega_k^2 y$, $k = 1..N$, тобто коливне включення розглядається як сукупність осциляторів Ван дер Поля.

Використовуючи характерні величини τ , c_0 , u_0 , виконаємо знерозмірення моделі (1) за формулами $t \rightarrow \tau t$, $x \rightarrow \tau c_0 x$, $u \rightarrow u_0 u$, $w \rightarrow u_0 w$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_k \tau^{-1}$, $\omega_k \rightarrow \omega_k \tau^{-1}$, $\mu_k = \lambda_k \tau^{-1} u_0^{-2}$.

© В.А. ДАНИЛЕНКО, С.І. СКУРАТИВСЬКИЙ,
І.А. СКУРАТИВСЬКА, 2014

Тоді модель (1) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \lambda_k [1 - (w_k - u)^2] \frac{\partial (w_k - u)}{\partial t} + \\ &+ \omega_k^2 (w_k - u) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $c^2 = E\rho^{-1}c_0^{-2}$.

Розглянемо хвильові розв'язки моделі (2):

$$u = U(s), \quad w_k = W_k(s), \quad s = x + Dt \quad (3)$$

та проаналізуємо залежність структури розв'язку (3) від параметрів λ_k, D .

2. Побудова асимптотичного розв'язку моделі (2)

Підставляючи вирази (3) в систему (2), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} W_k'' + \Omega_k^2 (W_k - U) &= R_k (W_k - U), \\ U &= \sum_{j=1}^N \varphi_j W_j, \end{aligned} \quad (4)$$

де $R_k(y) = \alpha_k(1 - y^2)y'$, $\alpha_k = \frac{\lambda_k}{D}$, $\Omega_k = \frac{\omega_k}{D}$, $\varphi_k = \frac{D^2}{c^2 - D^2} m_k$, $(\cdot)' = d(\cdot)/ds$, $k = 1, \dots, N$.

Розглянемо хвильові розв'язки моделі, яка враховує динаміку трьох типів осциляторів, тобто $N = 3$. Динамічна система (4) належить до класу моделей зв'язаних осциляторів. Основний інтерес у дослідженнях цих моделей становлять нові ефекти, які зумовлені типом взаємодії між частковими осциляторами. Як правило, в цих моделях розрізняють зв'язок осциляторів з найближчим сусідом [11, 12] або глобально зв'язані осцилятори через середнє поле [13–15]. Система (4) є прикладом останнього випадку. Основними засобами вивчення таких моделей є асимптотичні та числові методи.

Розглянемо слабконелінійний випадок, коли $\alpha_k = \varepsilon \alpha_k$, де $\varepsilon \ll 1$. У цьому випадку до системи (4) можна застосувати метод Боголюбова–Митропольського [16, 17]. При $\varepsilon = 0$ розв'язки системи (4) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} W_1 &= ar_{11} \sin \theta_1 + br_{12} \sin \theta_2 + cr_{13} \sin \theta_3, \\ W_2 &= ar_{21} \sin \theta_1 + br_{22} \sin \theta_2 + cr_{23} \sin \theta_3, \\ W_3 &= ar_{31} \sin \theta_1 + br_{32} \sin \theta_2 + cr_{33} \sin \theta_3, \end{aligned} \quad (5)$$

де $a, b, c, r_{ij}, k_i, \beta_i$ — сталі, $\theta_i = k_i s + \beta_i$, $i, j = 1, 2, 3$. Підставляючи (5) у (4), при $\varepsilon = 0$ отримуємо систему лінійних рівнянь відносно r_{ij} , умовою сумісності якої є рівняння

$$\begin{vmatrix} K_1 & \Omega_1^2 \varphi_2 & \Omega_1^2 \varphi_3 \\ \Omega_2^2 \varphi_1 & K_2 & \Omega_2^2 \varphi_3 \\ \Omega_3^2 \varphi_1 & \Omega_3^2 \varphi_2 & K_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

де $K_i = k_i^2 + \Omega_i^2 (\varphi_i - 1)$, $i = 1, 2, 3$. Враховуючи умову (6) та приймаючи $r_{1j} = 1$, $j = 1, 2, 3$, отримуємо

$$\begin{aligned} r_{2j} &= \frac{\Omega_2^2 (k_j^2 - \Omega_1^2)}{\Omega_1^2 (k_j^2 - \Omega_2^2)}, \\ r_{3j} &= \frac{k_j^4 + k_j^2 (\Omega_1^2 (1 - \varphi_1) + \Omega_2^2 (1 - \varphi_2))}{\Omega_1^2 (k_j^2 - \Omega_2^2) \varphi_3} - \\ &- \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2 (1 - \varphi_1 - \varphi_2)}{\Omega_1^2 (k_j^2 - \Omega_2^2) \varphi_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

При малому $\varepsilon \neq 0$ вважатимемо, що розв'язок системи (4) визначається виразами (5), у яких a, b, c, β_i є функціями "повільної" змінної εs . Також приймемо, що

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{ds} &= ak_1 \cos \theta_1 + bk_2 \cos \theta_2 + ck_3 \cos \theta_3, \\ \frac{dW_2}{ds} &= ar_{21} k_1 \cos \theta_1 + \\ &+ br_{22} k_2 \cos \theta_2 + cr_{23} k_3 \cos \theta_3, \\ \frac{dW_3}{ds} &= ar_{31} k_1 \cos \theta_1 + \\ &+ br_{32} k_2 \cos \theta_2 + cr_{33} k_3 \cos \theta_3, \end{aligned} \quad (8)$$

за додаткової умови

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} \sin \theta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} a \cos \theta_1 + \frac{db}{ds} \sin \theta_2 + \frac{d\beta_2}{ds} b \cos \theta_2 + \\ + \frac{dc}{ds} \sin \theta_3 + \frac{d\beta_3}{ds} c \cos \theta_3 = 0, \\ \frac{da}{ds} r_{21} \sin \theta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} ar_{21} \cos \theta_1 + \frac{db}{ds} r_{22} \sin \theta_2 + \\ + \frac{d\beta_2}{ds} br_{22} \cos \theta_2 + \frac{dc}{ds} r_{23} \sin \theta_3 + \frac{d\beta_3}{ds} cr_{23} \cos \theta_3 = 0, \\ \frac{da}{ds} r_{31} \sin \theta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} ar_{31} \cos \theta_1 + \frac{db}{ds} r_{32} \sin \theta_2 + \\ + \frac{d\beta_2}{ds} br_{32} \cos \theta_2 + \frac{dc}{ds} r_{33} \sin \theta_3 + \frac{d\beta_3}{ds} cr_{33} \cos \theta_3 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи (5), (8) у (4) з урахуванням (6) отримуємо таку систему в нормальній формі:

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \frac{\varepsilon \cos \theta_1}{k_1 \delta} (R_1 (r_{23} r_{32} - r_{22} r_{33}) + \\ &+ R_2 (r_{33} - r_{32}) + R_3 (r_{22} - r_{23})), \\ \frac{db}{ds} &= \frac{\varepsilon \cos \theta_2}{k_2 \delta} (R_1 (r_{21} r_{33} - r_{23} r_{31}) + \\ &+ R_2 (r_{31} - r_{33}) + R_3 (r_{23} - r_{21})), \\ \frac{dc}{ds} &= \frac{\varepsilon \cos \theta_3}{k_3 \delta} (R_1 (r_{22} r_{31} - r_{21} r_{32}) + \\ &+ R_2 (r_{32} - r_{31}) + R_3 (r_{21} - r_{22})), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} R_k &= \alpha_k \left[1 - \left(W_k - \sum_{j=1}^3 \varphi_j W_j \right)^2 \right] \times \\ &\times \frac{d}{ds} \left(W_k - \sum_{j=1}^3 \varphi_j W_j \right), \\ \delta &= r_{23} (r_{32} - r_{31}) + r_{21} (r_{33} - r_{32}) + r_{22} (r_{31} - r_{33}). \end{aligned}$$

Після осереднення

$$\frac{d}{ds}(\star) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\star) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3,$$

система (10) матиме вигляд

$$\begin{aligned} 4\delta \frac{dx}{dT} &= x (A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z), \\ 4\delta \frac{dy}{dT} &= y (B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z), \\ 4\delta \frac{dz}{dT} &= z (C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z), \end{aligned} \quad (11)$$

де $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $T = \varepsilon s$. Інші параметри

$$\begin{aligned} A_0 &= 4(\alpha_1 H_{11}^2 (r_{23} r_{32} - r_{22} r_{33}) + \alpha_2 H_{21} (r_{33} - r_{32}) + \\ &+ \alpha_3 H_{31} (r_{22} - r_{23})), \\ A_1 &= \alpha_1 H_{11}^3 (r_{23} r_{32} - r_{22} r_{33}) - \alpha_2 H_{21}^3 (r_{33} - r_{32}) - \\ &- \alpha_3 H_{31}^3 (r_{22} - r_{23}), \\ A_2 &= 2(\alpha_1 H_{11} H_{12}^2 (r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32}) + \\ &+ \alpha_2 H_{21} H_{22}^2 (r_{32} - r_{33}) - \alpha_3 H_{31} H_{32}^2 (r_{22} - r_{23})), \\ A_3 &= 2(\alpha_1 H_{11} H_{13}^2 (r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32}) + \\ &+ \alpha_2 H_{21} H_{23}^2 (r_{32} - r_{33}) - \alpha_3 H_{31} H_{33}^2 (r_{22} - r_{23})), \end{aligned}$$

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2014. Т. 59, № 9

$$\begin{aligned} B_0 &= 4(-\alpha_1 H_{12} (r_{23} r_{31} - r_{21} r_{33}) + \\ &+ \alpha_2 H_{22} (r_{31} - r_{33}) - \alpha_3 H_{32} (r_{21} - r_{23})), \\ B_1 &= -2(\alpha_1 H_{12} H_{11}^2 (r_{21} r_{33} - r_{23} r_{31}) + \\ &+ \alpha_2 H_{22} H_{21}^2 (r_{31} - r_{33}) - \alpha_3 H_{32} H_{31}^2 (r_{21} - r_{23})), \\ B_2 &= \alpha_1 H_{12}^3 (r_{23} r_{31} - r_{21} r_{33}) - \alpha_2 H_{22}^3 (r_{31} - r_{33}) + \\ &+ \alpha_3 H_{32}^3 (r_{21} - r_{23}), \\ B_3 &= -2(-\alpha_1 H_{12} H_{13}^2 (r_{23} r_{31} - r_{21} r_{33}) + \\ &+ \alpha_2 H_{22} H_{23}^2 (r_{31} - r_{33}) - \alpha_3 H_{32} H_{33}^2 (r_{21} - r_{23})), \\ C_0 &= 4(\alpha_1 H_{13} (r_{22} r_{31} - r_{21} r_{32}) - \\ &- \alpha_2 H_{23} (r_{31} - r_{32}) + \alpha_3 H_{33} (r_{21} - r_{22})), \\ C_1 &= 2(\alpha_1 H_{13} H_{11}^2 (r_{21} r_{32} - r_{22} r_{31}) + \\ &+ \alpha_2 H_{23} H_{21}^2 (r_{31} - r_{32}) - \alpha_3 H_{33} H_{31}^2 (r_{21} - r_{22})), \\ C_2 &= 2(-\alpha_1 H_{13} H_{12}^2 (r_{22} r_{31} - r_{21} r_{32}) + \\ &+ \alpha_2 H_{23} H_{22}^2 (r_{31} - r_{32}) - \alpha_3 H_{33} H_{32}^2 (r_{21} - r_{22})), \\ C_3 &= -\alpha_1 H_{13}^3 (r_{22} r_{31} - r_{21} r_{32}) + \alpha_2 H_{23}^3 (r_{31} - r_{32}) - \\ &- \alpha_3 H_{33}^3 (r_{21} - r_{22}), \end{aligned}$$

де $H_{1j} = \varphi_1 - 1 + \varphi_2 r_{2j} + \varphi_3 r_{3j}$, $H_{2j} = \varphi_1 + (\varphi_2 - 1)r_{2j} + \varphi_3 r_{3j}$, $H_{3j} = \varphi_1 + \varphi_2 r_{2j} + (\varphi_3 - 1)r_{3j}$.

Таким чином, ми приходимо до вивчення структури першого октанта фазового простору системи (11).

3. Аналіз двовимірних підсистем динамічної системи (11)

Очевидно, що система (11) на координатних площинах зводиться до систем на площині, наприклад, вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= x (A_0 + A_1 x + A_2 y), \\ \frac{dy}{dT} &= y (B_0 + B_1 x + B_2 y), \quad z = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Динамічна система (12) описує динаміку амплітуди двочастотного розв'язку (5).

За допомогою масштабного перетворення

$$\begin{aligned} \nu \varepsilon s &= T, \quad x = \xi \bar{x}, \quad y = \eta \bar{y}, \\ \nu &= -\frac{A_0}{4\delta}, \quad \xi = -\frac{A_0}{A_1}, \quad \eta = -\frac{A_0}{A_2}, \end{aligned}$$

приведемо динамічну систему (12) до вигляду (опускаючи ризики над змінними)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= x(x+y-1), \\ \frac{dy}{dT} &= y(\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2}, \quad \mu_3 = \frac{B_0}{A_0}.$$

Не зупиняючись на детальному аналізі цієї амплітудної системи, який проведений у роботі [10], зазначимо основні властивості динамічної системи (13).

Динамічна система (13) має чотири стаціонарні точки з координатами

$$O(0;0), X(1;0), Y\left(0; \frac{\mu_3}{\mu_2}\right), Q\left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}; \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right).$$

Зі змісту змінних x та y випливає, що точки Y та Q лежать у першій чверті фазової площини, якщо

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geq 0 \quad \text{та} \quad \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1} \geq 0, \quad \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \geq 0$$

відповідно.

Власні значення матриці лінеаризації

$$J(x_0; y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 + y_0 - 1 & x_0 \\ \mu_1 x_0 + 2\mu_2 y_0 - \mu_3 & \end{pmatrix}$$

- для точки O дорівнюють $\lambda_O = (-1; -\mu_3)$;
- для точки X - $\lambda_X = (1; \mu_1 - \mu_3)$;
- для точки Y - $\lambda_Y = (\mu_3; \mu_3 \mu_2^{-1} - 1)$;
- для точки Q -

$$\lambda_Q = \frac{\mu_2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_3 + \mu_2 \mu_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(\mu_2 - \mu_1)},$$

де $\Delta = (\mu_2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_3 + \mu_2 \mu_3)^2 + 4(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_3)$.

Очевидно, що стаціонарні точки X та Y відповідають існуванню в системі гармонічних режимів з частотами k_1 та k_2 , точка Q відповідає бігармонічному режиму.

Як показано в [18], система (13) не має замкнутих траєкторій, оскільки існує функція

$$V(x, y) = x^{p-1} y^{q-1}, \quad p = \frac{\mu_2 - \mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad q = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - \mu_2},$$

така, що

$$G = \frac{\partial}{\partial x}(Bx(x+y-1)) + \frac{\partial}{\partial y}(By(\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3)) = \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_3 - 1) + \mu_3}{\mu_1 - \mu_2} B.$$

Крива $G = 0$ не має віток, зокрема, в першій чверті, якщо $\mu_2(\mu_1 - \mu_3 - 1) + \mu_3 \neq 0$. Тож за критерієм Дюлака в першій чверті немає замкнутих траєкторій. У роботі [10] проаналізовано всі типові фазові портрети динамічної системи залежно від зміни параметра D та вказано окремі випадки, коли можна знайти точні розв'язки динамічної системи. Зокрема, знайдено точний розв'язок

$$y(x) = \frac{x(x-1)}{-x \pm \sqrt{x^2 + \text{const}(x-1)x^{2-2\mu_3}}}, \quad (14)$$

за додаткових умов

$$\mu_2 = 2\mu_3, \quad \mu_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\mu_3), \quad (15)$$

який не виявлено в [19].

4. Якісний аналіз стаціонарних точок динамічної системи (11)

Розглянемо структуру фазового простору динамічної системи (11) в околі стаціонарної точки, координати $S(x_0; y_0; z_0)$ якої задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 &= 0, \\ B_0 + B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 &= 0, \\ C_0 + C_1 x_0 + C_2 y_0 + C_3 z_0 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Згідно з формулою Крамера $x_i = \Delta_i \Delta^{-1}$. Встановимо умови, коли в околі стаціонарної точки S можуть виникнути коливальні режими, користуючись теоремою Андронова-Хопфа [20]. Згідно з теоремою, однією з необхідних умов появи періодичного розв'язку є наявність у матриці лінеаризації

$$J = \begin{pmatrix} A_1 x_0 & A_2 x_0 & A_3 x_0 \\ B_1 y_0 & B_2 y_0 & B_3 y_0 \\ C_1 z_0 & C_2 z_0 & C_3 z_0 \end{pmatrix}$$

пари суто уявних власних значень. Тоді матриця J повинна з необхідністю задовольняти співвідношення

$$\det J = \text{tr} J \sum_{i=1}^3 J_{ii}.$$

Цю умову зручно записати у такому вигляді:

$$(A_1\Delta_1 + B_2\Delta_2 + C_3\Delta_3) \left(\frac{1}{\Delta_3} \left| \begin{matrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{matrix} \right| + \frac{1}{\Delta_2} \left| \begin{matrix} A_1 & A_3 \\ C_1 & C_3 \end{matrix} \right| + \frac{1}{\Delta_1} \left| \begin{matrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{matrix} \right| \right) = 1. \quad (17)$$

Отриманий вираз (17) є кривою нейтральної стійкості і являє собою деякий многовид у параметричному просторі, при перетині якого із сідлофокуса S із стійким одновимірним многовидом може з'явитись граничний цикл. Для вивчення граничного циклу при віддаленні від кривої нейтральної стійкості достатньо ефективними є методи якісного та числового аналізу [21].

5. Числовий аналіз системи (11)

Виберемо значення параметрів моделі, вимагаючи щоб (i) розв'язки рівняння (6) були дійсними, (ii) розв'язки системи (16) були додатними, тобто стаціонарна точка S лежала в першому октанті. Враховуючи ці вимоги, зафіксуємо такі значення параметрів: $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,4$, $\omega_3 = 0,6$, $m_1 = 0,5$, $m_2 = 0,6$, $m_3 = 0,8$, $\lambda_1 = 1,8$, $\lambda_2 = 0,5$, $c = 1$, $D = 1,3$.

Один із параметрів λ_i , наприклад λ_3 , зручно вибрати в ролі біфуркаційного. Тоді величини k_i^2 та r_{ij} не залежать від λ_3 і не змінюються протягом числових експериментів. Таким чином,

$$\begin{aligned} \{k_i^2\} &= \{0,0290475; 0,121186; 0,766635\}, \\ \{r_{2i}\} &= \{-0,327842; 14,7132; 4,42268\}, \\ \{r_{3i}\} &= \{0,291313; -33,4464; -25,641\}, \\ \delta &= 229,779, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

Підставляючи (18) в умову (17), отримуємо алгебраїчне рівняння високого степеня відносно λ_3 , один із розв'язків якого $\lambda_3 = \lambda_3^* = -0,406295$ відповідає існуванню в спектрі матриці лінеаризації J двох суто уявних та одного від'ємного власного значення. З аналізу власних значень матриці J також випливає, що при $\lambda_3 < \lambda_3^*$ точка S є стійким фокусом, а при $\lambda_3 > \lambda_3^*$ – нестійким фокусом.

Розглянемо поведінку траєкторій системи (11) при $\lambda_3 > \lambda_3^*$. Стартуючи від значення $\lambda_3 = -0,035$, проінтегруємо систему (11) з початковими умовами, вибраними поблизу стаціонарної точки S , та переконаємось, що траєкторія системи намотується на граничний цикл (рис. 1).

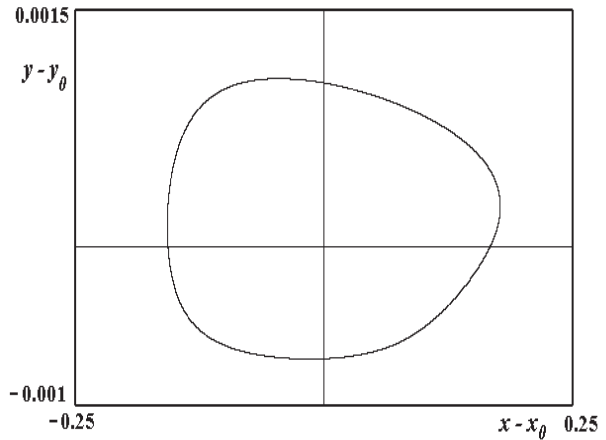


Рис. 1. Фазовий портрет граничного циклу у фазовому просторі динамічної системи (11) при $\lambda_3 = -0,035$

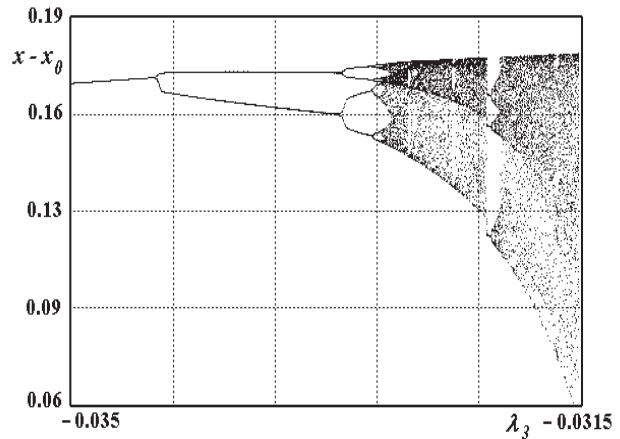


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма розвитку граничного циклу динамічної системи (11) при зростанні параметра λ_3

Розвиток граничного циклу при зростанні параметра λ_3 зручно вивчати за допомогою техніки перерізів Пуанкаре. У ролі січної площини виберемо $y = 0$. Тоді вздовж вертикальної осі відкладемо x координату точки перетину траєкторії з січною площиною, вздовж горизонтальної осі – параметр λ_3 . Аналіз отриманої біфуркаційної діаграми (рис. 2) показує, що граничний цикл зазнає кількох біфуркацій подвоєння з наступним утворенням хаотичного атрактора доволі типової структури (рис. 3). Одна із особливостей хаотичної області діаграми – вікно періодичності при $\lambda_3 = -0,03213$, яке відповідає існуванню періодичної траєкторії періода $3T$ (рис. 4). У цій же точці

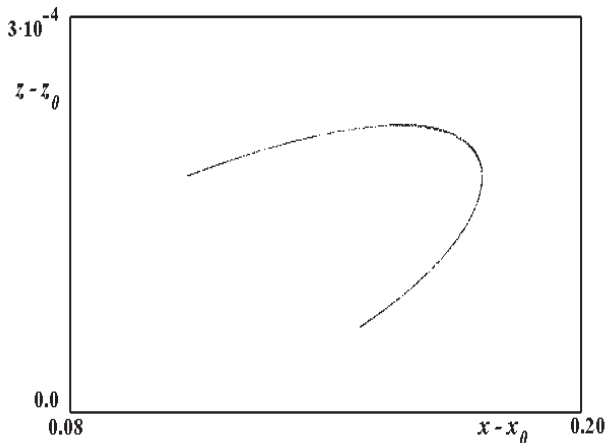


Рис. 3. Переріз Пуанкаре хаотичного аттрактора при $\lambda_3 = -0,032$

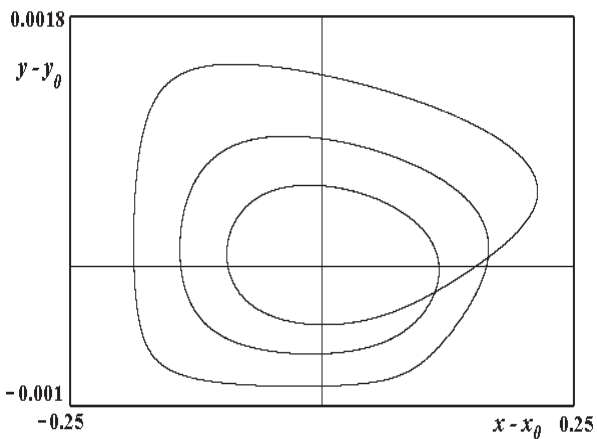


Рис. 4. Граничний цикл періоду $3T$ у фазовому просторі динамічної системи (11) при $\lambda_3 = -0,03213$

спостерігається стрибок амплітуди коливань. Незважаючи на це, форма перерізів Пуанкаре залишається схожою до параболи, як на рис. 3, а зміни відображаються лише у додаванні сегментів до віток цієї параболи.

6. Висновки

Таким чином, тричастотний хвильовий розв'язок слабконелінійної моделі середовища (1) описується амплітудною системою, яка володіє періодичними, мультиперіодичними та хаотичними розв'язками. Очевидно, що збільшення кількості часткових осциляторів в моделі зумовлює зростання розмір-

ності фазового простору амплітудної системи, що може спричинити існування нових режимів.

Зазначимо, що тричастотний режим виявлений тоді, коли у відсутності зв'язку два часткові осцилятори перебувають у режимі граничного циклу ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$), тоді як положення рівноваги третього є стійким фокусом $\lambda_3 < 0$. Поява зв'язку між осциляторами завдяки основному середовищу здатна перерозподіляти енергію між осциляторами та створити нові локалізовані режими.

Варто також наголосити, що отримані результати необхідно використовувати з певною мірою обережності, оскільки, як випливає з аналізу виразів (7) та (10), результати отримані за умови, що частоти розв'язку k_i^2 та часткові частоти лінійної системи Ω_i^2 відрізняються суттєво (відсутність резонансів). Тобто малий параметр ε повинен бути меншим, ніж різниці між вказаними частотами.

Незважаючи на відомі обмеження результатів, отриманих асимптотичними методами, можна стверджувати, що врахування в моделі середовища процесів на рівні мікроструктури дозволяє описати здатність таких середовищ до прояву самоорганізаційних властивостей: формування багато-періодичних локалізованих хвиль, їх біфуркацій тощо.

Отримані результати свідчать про те, що розмаїття принаймні хвильових розв'язків моделі (1) є значно ширшим, ніж розв'язків класичних моделей, які не враховують складну реологію середовищ. Однак, натомість ускладнюється безпосереднє застосування узагальнених моделей, наприклад моделі (1), до опису фізичного об'єкта. Окремі постановки задач, зокрема, про поширення вібрації вздовж одновимірного стрижня, розглядалися у роботі [22], де наголошувалось на необхідності залучення експериментальних даних про розподіл величин m_k, ω_k .

Інші постановки задач пов'язані з резонансними явищами у геоматеріалах [7], де власні частоти осциляторів ω_k ототожнювались з доміантними частотами геосередовищ [23]. Таким чином, розробка подібних моделей стимулює постановку нових дослідів, окреслює коло завдань для натурних та числових експериментів, дозволяє уточнити та впорядкувати відомі дані та методики їх збору.

1. A.S. Makarenko, УФЖ **57**, 408 (2012).
2. М.А. Садовский, Вест.АН СССР **8**, 3 (1986).

3. В.А. Пальмов, ПММ **4**, 768 (1969).
4. Л.И. Слепян, МТТ **5**, 34 (1967).
5. V.A. Danylenko, T.V. Danevych, O.S. Makarenko, S.I. Skurativskiy, and V.A. Vladimirov, *Self-organization in Non-local Non-Equilibrium Media* (Institute of Geophysics, Kyiv, 2011).
6. С.И. Скуратовский, И.А. Скуратовская, Элект. журнал "Техн. акустика", <http://ejta.org> **6** (2010).
7. В.А. Даниленко, С.И. Скуратівський, Доп. НАНУ **11**, 108 (2008).
8. С.И. Скуратівський, Мат. методи та фіз.-мех. поля **55(4)**, 47 (2012).
9. V.A. Danylenko and S.I. Skurativskiy, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **12(4)**, 365 (2012).
10. В.А. Даниленко, С.И. Скуратівський, Дин. сист. **2(30)**, 227 (2012).
11. D.W. Storti and R.H. Rand, *Int. J. Non-Linear Mechanics* **17**, 143 (1982).
12. А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина, Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика **16** 101 (2008).
13. E. Camacho, R.H. Rand, and H. Howland, *Int. J. of Solids and Structures* **41**, 2133 (2004).
14. А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс, *Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва, 2003).
15. T.A. Levanova, M.A. Komarov, and G.V. Osipov, *Eur. Phys. J. Special Topics* **222**, 2417 (2013).
16. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Наука, Москва, 1974).
17. Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев, *Введение в теорию нелинейных колебаний* (Наука, Москва, 1987).
18. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости* (Наука, Москва, 1976).
19. В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (Физматлит, Москва, 2001).
20. J. Guckenheimer and Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, (Springer-Verlag, NY, 1987).
21. В.Н. Сидорець, И.В. Пентегов, *Детерминированный хаос в нелинейных цепях с электрической дугой* (Международная ассоциация "Сварка", Киев, 2013).
22. V. Palmov, *Vibrations of elasto-plastic bodies* (Springer, Berlin, 1998).
23. Н.А. Вильчинская, В.Н. Николаевский, *Физика Земли*, **5**, 91 (1984).

Отримано 12.03.14

В.А. Даниленко,

С.И. Скуратовский, И.А. Скуратовская

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ

ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ СРЕДЫ

С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Резюме

В работе рассматривается одномерная математическая модель сложной среды, которая состоит из волнового уравнения для несущей среды и связанных с ним уравнений Ван дер Поля для осциллирующих включений. Используя метод Боголюбова–Митропольского, построены волновые решения слабонелинейной модели, амплитуда которых описывается трехмерной динамической системой. Амплитудная система изучалась более детально методами качественного и численного анализа. В частности, в фазовом пространстве системы обнаружено существование периодических, мультипериодических и хаотических траекторий, исследованы бифуркации этих режимов с помощью техники сечений Пуанкаре, также найдены точные решения в случае редукции системы к двумерной.

V.A. Danylenko,

S.I. Skurativskiy, I.A. Skurativska

ASYMPTOTIC WAVE

SOLUTIONS FOR THE MODEL OF A MEDIUM

WITH VAN DER POL OSCILLATORS

Summary

A one-dimensional mathematical model for a complex medium with van der Pol oscillators has been studied. Using the Bogolyubov–Mitropolsky method, the wave solutions for a weakly nonlinear model are derived, with their amplitudes being described by a three-dimensional dynamical system analyzed in more details by numerical and qualitative methods. In particular, periodic, multiperiodic, and chaotic trajectories are found in the phase space of the dynamical system. Bifurcations of those regimes were considered using the Poincaré section technique. Exact solutions are derived in the case where the three-dimensional system for amplitudes is reduced to the two-dimensional one.