

М.М. ДЯЧЕНКО, О.П. НОВАК, Р.І. ХОЛОДОВ

Інститут прикладної фізики НАН України

(Вул. Петропавлівська, 58, Суми, 40000; e-mail: dia4enkomisha@yandex.ru,  
novak-o-p@ukr.net, kholodovroman@yahoo.com)

## ПОРОГОВЕ РЕЗОНАНСНЕ ДВОФОТОННЕ НАРОДЖЕННЯ $e^-e^+$ ПАРИ В СИЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ НА НАЙНИЖЧІ РІВНІ ЛАНДАУ

УДК 539.1.01

*В роботі розглянуто процес народження електрон-позитронної пари двома фотонами в сильному магнітному полі. Досліджена кінематика та знайдена загальна амплітуда процесу з довільною поляризацією частинок. Знайдено умови резонансного перебігу реакції та проведено оцінку перерізу для випадку, коли електрон та позитрон займають найнижчі рівні ( $l_e = 1, l_p = 0$ ), що задовольняють умови резонансу.*

*Ключові слова:* електрон-позитронна пара, фотонародження, магнітне поле, КЕД, резонанс.

### 1. Вступ

Актуальність досліджень процесів квантової електродинаміки (КЕД), що проходять під час зіткнень важких іонів, зумовлена прогресом в області прискорювачів важких іонів. Зазвичай у подібних експериментах головна увага зосереджена на вивченні властивостей сильної взаємодії. Однак, дослідження квантово-електродинамічних процесів також можливе, якщо ядра не наближаються на відстань сильної взаємодії [1, 2].

У зіткненнях важких іонів генеруються надзвичайно інтенсивні швидкозмінні електромагнітні поля. Результуюча напруженість поля може перевищувати критичне квантово-електродинамічне значення  $H_c = m^2 c^3 / e \hbar \approx 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс, яке являється, згідно з теоретичними уявленнями, пороговим для збудження вакууму [3]. Це відкриває значні можливості для перевірки передбачень КЕД в області сильних полів. Широка програма таких експериментів запланована на майбутній установці FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research), побудова якої ведеться на базі GSI (GSI Helmholtz Centre for Heavy Ion Research), Дармштадт, Німеччина [4].

Утворення електрон-позитронної пари в зіткненнях іонів є актуальним як з теоретичної, так і з експериментальної точок зору. Зокрема, утворення пари з електроном у зв'язаному стані змінює заряд одного з іонів та є однією з основних причин втрат у пучках у сучасних колайдерах. З іншого боку, утворення пари сильним сумарним надкритичним полем важких ядер є свідченням занурення зв'язаних станів у негативний енергетичний континуум та переходу вакууму в новий стан [3].

Малодослідженим аспектом утворення  $e^-e^+$  пари в зіткненнях іонів є вплив магнітного поля рухомих іонів. Прості оцінки показують, що в області між іонами поле може досягати критичного значення  $H_c$  та навіть перевищувати його вже при енергії зіткнення порядку кулонівського бар'єра, однак в більшості досліджень враховується лише їх кулонівське поле. Вперше спроби виявити вплив магнітного поля були зроблені в роботах [5–7] в рамках моделі квазімолекули (для низькоенергетичних зіткнень). Проведені чисельні розрахунки показали відсутність ефекту, але не була врахована взаємодія утвореної пари з магнітним полем.

У роботі [8] обґрунтовується припущення, що утворена електрон-позитронна пара захоплює ма-

гнітне поле подібно до явища “вмороженості” силових ліній поля в плазму. Проведені оцінки показують, що час життя такої самоузгодженої системи “пара + магнітне поле” істотно перевищує час прольоту ядер. Таким чином, магнітне поле може значно впливати на перебіг процесу. Спостережуваним свідченням квантово-електродинамічних процесів у магнітному полі, створеному зіптовхуваними іонами, може бути наявність характерних резонансів у відповідних каналах.

Необхідно зазначити, що в експериментах EPOS та ORANGE, проведених в GSI, були виявлені аномальні піки в каналі народження електрон-позитронних пар [9–11]. Природа піків не була з’ясована, а сама їх наявність не була підтверджена. Враховуючи подібність спектра аномальних піків до квазіеквідистантного спектра енергетичних рівнів електрона в магнітному полі, можна припустити, що подальше дослідження ролі магнітного поля в зіткненнях іонів поглибить розуміння даного явища.

Враховуючи те, що згідно з [8] час життя магнітного поля значно перевищує характерний час електромагнітної взаємодії, можна розглядати процес як народження електрон-позитронної пари в постійному однорідному магнітному полі, що дозволить виявити його основні риси і в той же час одержати прості аналітичні вирази для перерізу. Крім того, якщо енергія іонів є достатньо високою, виконуються умови застосування методу еквівалентних фотонів [12]. Таким чином, в найпростішому випадку задача наближено зводиться до процесу двофотонного народження електрон-позитронної пари в магнітному полі.

Відзначимо також можливе застосування результатів роботи в задачі електронного охолодження пучків важких іонів. Суть метода полягає в зниженні ефективної температури пучка за рахунок зіткнення з електронами, що рухаються разом з ним і мають малий розкид за швидкостями [13–15]. Хоча метод електронного охолодження відомий давно і широко використовується в прискорювальній техніці, залишається непоясненою різниця в ефективності охолодження позитивних та негативних частинок, що спостерігається на експерименті [16]. Зокрема, електронне охолодження пучка антипротонів планується використати в накопичувачі HESR (FAIR), що обґрунтовує актуальність задачі [17, 18].

Метод квантової теорії поля в задачі електронного охолодження [19, 20] має значні переваги порівняно з іншими (метод парних зіткнень, діелектрична модель тощо), оскільки не містить феноменологічних параметрів. Гальмівна здатність при цьому виражається через поляризаційний оператор. Різниця в охолодженні протонів та антипротонів, імовірно, може бути описана в другому борнівському наближенні. Але, згідно з оптичною теоремою, уявна частина поляризаційного оператора в другому порядку дорівнює повній імовірності процесу двофотонного народження пари.

Вперше процес двофотонного народження електрон-позитронної пари в магнітному полі було розглянуто в найпростішому випадку лобового зіткнення фотонів вздовж магнітного поля в роботі [21]. В роботі [22] цей процес вивчено при довільних напрямках поширення фотонів, але припущення, що енергії кожного з фотонів недостатньо для утворення пари в однофотонному процесі. Ця умова виключає можливість резонансного перебігу реакції.

На відміну від раніше проведених досліджень, у даній роботі процес розглянуто для випадку, коли енергії одного або кожного з фотонів достатньо для народження пари. Знайдена загальна амплітуда процесу з довільною поляризацією частинок та умови резонансного перебігу процесу. Проведено оцінку перерізу процесу для найнижчих рівнів Ландау, які задовольняють резонансні умови.

Надалі в роботі використовується релятивістська система одиниць,  $\hbar = c = 1$ .

## 2. Кінематика

Як відомо [12], в однорідному магнітному полі електрон займає дискретні рівні енергії

$$E = \sqrt{p_z^2 + \tilde{m}^2}, \quad \tilde{m} = m\sqrt{1 + 2l\hbar}, \quad (1)$$

де  $p_z$  – поздовжня полю компонента імпульсу,  $l$  – номер рівня,  $\hbar$  – магнітне поле в одиницях  $H_c$ .

У магнітному полі виконуються закони збереження енергії та паралельної полю компоненти імпульсу, які для процесу народження  $e^-e^+$  пари двома фотонами мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} E_e + E_p &= W, \\ p_{ez} + p_{pz} &= K, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $W = \omega_1 + \omega_2$  та  $K = k_{1z} + k_{2z}$  – сумарні енергія та поздовжній імпульс фотонів.

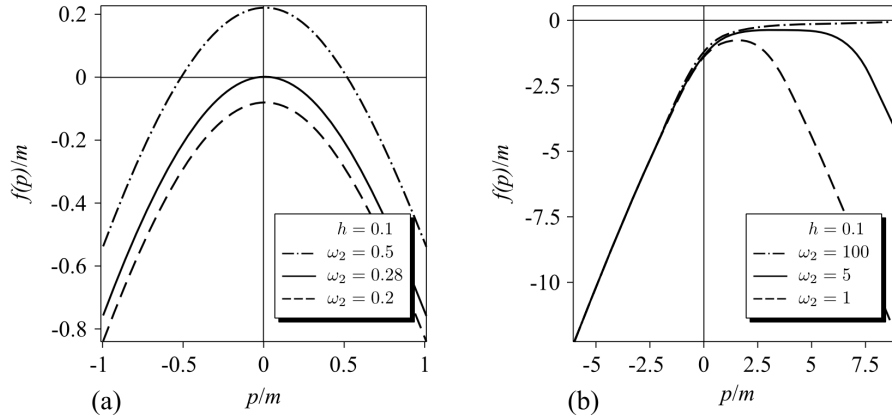


Рис. 1. Графіки функції  $f(p_{ez})/m$  для номерів рівнів Ландау  $l_e = 2$ ,  $l_p = 1$ . Частота першого фотона в одиницях маси електрона  $\omega_1 = 2$ : а -  $\theta_{1,2} = \pi/2$ ; б -  $\theta_{1,2} = 0$

Знайдемо порогові умови народження пари на деякі вибрані рівні Ландау  $l_e, l_p$ . Введемо допоміжну функцію  $f(p_{ez}) = \omega_1 + \omega_2 - E_e - E_p$ . Поріг процесу визначається умовою  $f(p_m) = 0$ , де  $p_m$  – точка максимуму функції. Після диференціювання можна знайти значення імпульсу електрона в точці максимуму:

$$p_m = \frac{\tilde{m}_e K}{\tilde{m}_e + \tilde{m}_p}. \quad (3)$$

Враховуючи попередні вирази, порогові значення енергії та імпульсів електрона та позитрона визначаються:

$$E'_e = \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_e + \tilde{m}_p} W', \quad p'_{ez} = \frac{K' E'_e}{W'}, \quad (4)$$

$$E'_p = \frac{\tilde{m}_p}{\tilde{m}_e + \tilde{m}_p} W', \quad p'_{pz} = \frac{K' E'_p}{W'}. \quad (5)$$

Звідси випливає умова порога реакції у вигляді

$$W'^2 - K'^2 = (\tilde{m}_e + \tilde{m}_p)^2. \quad (6)$$

У загальному випадку (над порогом), з системи (2) випливає такий вираз для імпульсів частинок:

$$p_{ez} = \frac{aK \pm bW}{2M^2}, \quad (7)$$

де введено позначення

$$a = M^2 - \tilde{m}_p^2 + \tilde{m}_e^2, \quad (8)$$

$$b^2 = M^4 - 2M^2((\tilde{m}_e)^2 + (\tilde{m}_p)^2) + 4(l_p - l_e)^2 h^2, \quad (9)$$

$$M^2 = W^2 - K^2. \quad (10)$$

Очевидно, що процес неможливий, коли обидва фотони рухаються паралельно  $\mathbf{H}$ , оскільки тоді  $K^2 = W^2$  і (6) не виконується. Дана ситуація проілюстрована на рис. 1.

Зауважимо, що перетворення Лоренца вздовж  $\mathbf{H}$  не змінюють саме магнітне поле. Тому вибором системи відліку можна без втрати загальності виключити поздовжній імпульс фотонів:  $K = 0$ . В такій системі відліку  $p_{ez} = -p_{pz}$ , а порогові умови набувають більш простого вигляду:

$$W' = \tilde{m}_e + \tilde{m}_p, \quad p'_{ez} = p'_{pz} = 0. \quad (11)$$

### 3. Амплітуда

Хвильові функції електрона та позитрона мають вигляд [23]:

$$\Psi_e = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{-i(Et - p_y y - p_z z)} \psi_e(\zeta^-), \quad (12)$$

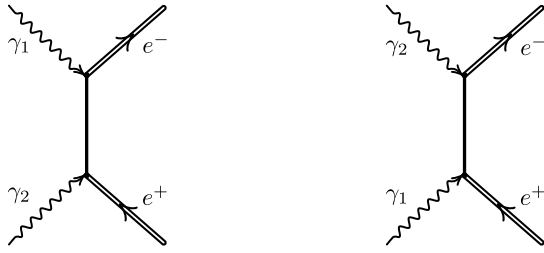
$$\Psi_p = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{+i(Et - p_y y - p_z z)} \psi_p(\zeta^+),$$

де  $\zeta^\pm = m\sqrt{h}(x \mp p_y/m^2 h)$ ,

$$\psi_e(\zeta^-) = C_e \left[ i\sqrt{\tilde{m}_e - \mu_e m} U_l(\zeta^-) + \mu_e \sqrt{\tilde{m}_e + \mu_e m} U_{l-1}(\zeta^-) \gamma^1 \right] u_e, \quad (13)$$

$$\psi_p(\zeta^+) = C_p \left[ i\sqrt{\tilde{m}_p + \mu_p m} U_l(\zeta^+) - \mu_p \sqrt{\tilde{m}_p - \mu_p m} U_{l-1}(\zeta^+) \gamma^1 \right] u_p. \quad (14)$$

Тут  $S$  – площа нормування,  $U_l(x)$  – функція Ерміта,  $\mu_{e,p}$  – подвоєна проекція спіну електрона (по-



**Рис. 2.** Діаграми Фейнмана двофотонного народження  $e^-e^+$  пари в магнітному полі

зитрона),  $C_{e,p}$  – константи нормування,  $u_{e,p}$  – постійні біспінори:

$$C_{e,p} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{eH}}{E_{e,p} \tilde{m}_{e,p}}}, \quad (15)$$

$$u_{e,p} = \frac{1}{R_{e,p}} (0, \pm R_{e,p}^2, 0, p_{(e,p)z}), \quad (16)$$

$$R_{e,p} = \sqrt{E_{e,p} - \mu_{e,p} \tilde{m}_{e,p}}, \quad (17)$$

(знак "–" в  $u_{e,p}$  відноситься до електрона).

Хвильовим функціям (12)–(14) відповідає калібровка електромагнітного 4-потенціалу  $(0; 0, xH, 0)$ .

Для хвильової функції початкового фотона використаємо стандартний вираз [12]:

$$A^\nu = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}} e^\nu e^{ikx}, \quad (18)$$

де  $V$  – об'єм нормування,  $e^\nu = (0, \mathbf{e})$  – 4-вектор поляризації фотона:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \alpha - e^{i\beta} \sin \phi \sin \alpha \\ \sin \phi \cos \theta \cos \alpha + e^{i\beta} \cos \phi \sin \alpha \\ -\sin \theta \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тут  $\phi, \theta$  – азимутальний та полярний кути,  $\alpha, \beta$  – параметри поляризації.

Функція Гріна віртуального електрона має вигляд [24]:

$$G(x-x') = \frac{-m\sqrt{\hbar}}{(2\pi)^3} \int d^3g e^{-i\Phi} \sum_n \frac{G_H(x, x')}{g_0^2 - E_n^2}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G_H(x, x') &= U_n U'_n (\gamma P + m) \tau + \\ &+ im\sqrt{2n\hbar} U_{n-1} U'_n \gamma^1 \tau - im\sqrt{2n\hbar} U_n U'_{n-1} \tau \gamma^1 + \\ &+ U_{n-1} U'_{n-1} (\gamma P + m) \tau^*, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\gamma$  – гама-матриці Дірака,

$$\Phi = g_0(t-t') - g_y(y-y') - g_z(z-z'), \quad (22)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1), \quad (23)$$

$$P = (E_n, 0, 0, g_z). \quad (24)$$

Аргумент функцій Ерміта в (21) має вигляд

$$\rho(x) = m\sqrt{\hbar}x + g_y/m\sqrt{\hbar},$$

а штрих біля функції означає залежність від  $\rho(x')$ .

Згідно з правилами квантової електродинаміки, амплітуда процесу народження електрон-позитронної пари двома фотонами визначається як

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -ie^2 \int d^4x d^4x' \left[ \bar{\Psi}_e(A_1\gamma)G(x-x')(A'_2\gamma)\Psi'_p + \right. \\ &\left. + \bar{\Psi}_e(A_2\gamma)G(x-x')(A'_1\gamma)\Psi'_p \right] \end{aligned} \quad (25)$$

(штриховані величини залежать від  $x'$ ).

На рис. 2 зображені діаграми Фейнмана, які відповідають амплітуді (25).

Підставляючи в (25) хвильові функції та пропагатор і проводячи послідовні математичні перетворення, одержуємо амплітуду у вигляді

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \frac{-ie^2(2\pi)^4}{4VS\sqrt{\omega_1\omega_2\tilde{m}_e\tilde{m}_pE_eE_p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{16} B_j}{g_0^2 - E_n^2} \times \\ &\times \delta^3(\gamma_1 + \gamma_2 - e^- - e^+), \end{aligned} \quad (26)$$

де доданки  $B_j$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} B_1 &= -i\mu_e M_{e+}^{p+} e_1 T_2^- \times \\ &\times (mS^+ + E_n S^- - g_z A^-) I_{l_{e-1,n-1}}^{(1)} I_{n-1,l_p}^{(2)}, \\ B_2 &= \mu_e \mu_p M_{e+}^{p-} e_1 e_2 \times \\ &\times (mA^- + E_n A^+ + g_z S^+) I_{l_{e-1,n-1}}^{(1)} I_{n-1,l_{p-1}}^{(2)}, \\ B_3 &= i\mu_e M_{e+}^{p+} e_2 T_1^- (mS^+ + E_n S^- + g_z A^-) I_{l_{e-1,n}}^{(1)} I_{n,l_p}^{(2)}, \\ B_4 &= \mu_e \mu_p M_{e+}^{p-} T_1^- T_2^+ \times \\ &\times (mA^- + E_n A^+ - g_z S^+) I_{l_{e-1,n}}^{(1)} I_{n,l_{p-1}}^{(2)}, \\ B_5 &= -\mu_e M_{e+}^{p+} m\sqrt{2n\hbar} e_1 e_2 A^- I_{l_{e-1,n-1}}^{(1)} I_{n,l_p}^{(2)}, \\ B_6 &= -i\mu_e \mu_p M_{e+}^{p-} m\sqrt{2n\hbar} e_1 T_2^+ S^+ I_{l_{e-1,n-1}}^{(1)} I_{n,l_{p-1}}^{(2)}, \\ B_7 &= -\mu_e M_{e+}^{p+} m\sqrt{2n\hbar} T_1^- T_2^- A^- I_{l_{e-1,n}}^{(1)} I_{n-1,l_p}^{(2)}, \\ B_8 &= -i\mu_e \mu_p M_{e+}^{p-} m\sqrt{2n\hbar} e_2 T_1^- S^+ I_{l_{e-1,n}}^{(1)} I_{n-1,l_{p-1}}^{(2)}, \\ B_9 &= M_{e-}^{p+} T_1^- T_2^+ \times \\ &\times (mA^- - E_n A^+ + g_z S^+) I_{l_{e,n-1}}^{(1)} I_{n-1,l_p}^{(2)}, \\ B_{10} &= -i\mu_p M_{e-}^{p-} e_2 T_1^+ \times \\ &\times (mS^+ - E_n S^- - g_z A^-) I_{l_{e,n-1}}^{(1)} I_{n-1,l_{p-1}}^{(2)}, \end{aligned}$$

$$B_{11} = M_{e-}^{p+} e_1 e_2 (m A^- - E_n A^{+-} - g_z S^+) I_{l_e, n}^{(1)} I_{n, l_p}^{(2)},$$

$$B_{12} = i \mu_p M_{e-}^{p-} e_1 T_2^+ \times$$

$$\times (m S^{+-} - E_n S^{-+} + g_z A^-) I_{l_e, n}^{(1)} I_{n, l_p-1}^{(2)},$$

$$B_{13} = -i M_{e-}^{p+} m \sqrt{2n\hbar} e_2 T_1^+ S^+ I_{l_e, n-1}^{(1)} I_{n, l_p}^{(2)},$$

$$B_{14} = \mu_p M_{e-}^{p-} m \sqrt{2n\hbar} T_1^+ T_2^+ A^- I_{l_e, n-1}^{(1)} I_{n, l_p-1}^{(2)},$$

$$B_{15} = -i M_{e-}^{p+} m \sqrt{2n\hbar} e_1 T_2^- S^+ I_{l_e, n}^{(1)} I_{n-1, l_p}^{(2)},$$

$$B_{16} = \mu_p M_{e-}^{p-} m \sqrt{2n\hbar} e_1 e_2 A^- I_{l_e, n}^{(1)} I_{n-1, l_p-1}^{(2)}.$$

Тут  $e_{1,2} - z$  – компоненти векторів поляризації фотонів, а також введено позначення:

$$M_{e\pm}^{p\pm} = \sqrt{\tilde{m}_e \pm \mu_e m} \sqrt{\tilde{m}_p \pm \mu_p m}, \quad (27)$$

$$T_j^\pm = e_{jx} \pm i e_{jy}, \quad j = 1, 2, \quad (28)$$

$$A^\pm = \frac{R_e^2 R_p^2 \pm p_{ez} p_{pz}}{R_e R_p}, \quad (29)$$

$$S^\pm = \frac{R_e^2 p_{pz} \pm R_p^2 p_{ez}}{R_e R_p}, \quad (30)$$

$R_{e,p}$  визначаються рівнянням (17). Функції  $I_{l,l'}^{(j)}$  є характерними для задач КЕД в магнітному полі [28, 29]:

$$I_{l,l'}^{(j)} = e^{-\Phi_j} \frac{(i\sqrt{\eta_j})^{\Lambda-\lambda}}{(\Lambda-\lambda)!} \sqrt{\frac{\Lambda!}{\lambda!}} F(-\lambda, \Lambda-\lambda+1, \eta_j), \quad (31)$$

$$\Lambda = \max(l, l'), \quad \lambda = \min(l, l'), \quad (32)$$

$$\Phi_j = \frac{\eta_j}{2} + \frac{k_{jx} \kappa_j}{2m^2 \hbar} + i \phi_j (l - l'), \quad (33)$$

$$\kappa_1 = 2p_{ey} - k_{1y}, \quad (34)$$

$$\kappa_2 = k_{2y} - 2p_{py}, \quad (35)$$

$$\eta_j = \frac{k_{jx}^2 + k_{jy}^2}{2m^2 \hbar}, \quad (36)$$

де  $\phi_j$  – азимутальні кути фотонів,  $F(a, b, \eta)$  – вроджена гіпергеометрична функція.

Доданок, що відповідає обмінній діаграмі, відізняється заміною індексів  $1 \rightleftharpoons 2$ .

#### 4. Резонансні умови

Перебіг процесу набуває резонансного характеру, якщо кінематика дозволяє вихід віртуального електрона на масову поверхню, тобто величини  $g_0$  і  $g_z$  задовольняють звичайне співвідношення між енергією та імпульсом електрона в магнітному полі:

$$g_0^2 = g_z^2 + m^2 + 2n\hbar m^2 = E_n^2. \quad (37)$$

При цьому знаменник в пропагаторі (20) перетворюється на нуль. Для усунення розбіжності вводиться радіаційна ширина віртуального стану  $\Gamma$  згідно з правилом Брейта-Вігнера [25]:

$$E_n \rightarrow E_n - \frac{i}{2} \Gamma. \quad (38)$$

Знайдемо резонансні частоти фотонів в ультраквантовому наближенні, яке задається умовами

$$l \sim 1, \quad lh \ll 1. \quad (39)$$

Зазначимо, що дані умови характерні для субкритичних полів.

Обмежимося випадком, коли обидва фотони поширюються перпендикулярно магнітному полю, а їх енергія близька до порогової:

$$k_{1z} = k_{2z} = 0, \quad (40)$$

$$W = \tilde{m}_e + \tilde{m}_p + \delta W, \quad \delta W \lesssim m\hbar.$$

Тоді вираз для імпульсу (7) спрощується:

$$p_{ez} = \sqrt{m\delta W}. \quad (41)$$

Враховуючи те, що в вершинах діаграми виконуються закони збереження, з умови (37) знайдемо резонансні частоти для першої діаграми:

$$\omega_1 = m\hbar(l_e - n), \quad (42)$$

$$\omega_2 = 2m + m\hbar(l_p + n) + \delta W.$$

Звідси видно, що пара утворюється жорстким фотоном, а м'який викликає перехід віртуального електрона між рівнями Ландау. Цей результат не є несподіваним, оскільки в резонансі процес можна представити як послідовність однофотонного народження пари та поглинання фотона.

### 5. Резонансний переріз

Проведемо оцінку резонансного перерізу двофотонного народження пари в ультраквантовому наближенні. Вважатимемо виконаними умови (40)–(42). Крім того, виберемо енергетично вигідні поляризації частинок [26, 27] та номери рівнів Ландау, що відповідають найнижчому резонансу:

$$\mu_e = -1, \quad \mu_p = +1, \quad (43)$$

$$l_e = 1, \quad l_p = n = 0. \quad (44)$$

В амплітуді (26) в сумі по  $n$  залишимо лише резонансний доданок з  $n = 0$ , в якому знаменник прямує до нуля. При цьому друга діаграма не дає істотного внеску в процес, оскільки для неї резонансні умови не виконані.

Враховуючи сказане вище, а також вирази для резонансних частот (42) та умови (43), (44), розвинемо амплітуду (26) в ряд за малим параметром  $h$ . Обмежившись нульовим наближенням, знайдемо

$$S_{fi} \approx e^{i\Phi} e^2 (2\pi)^4 \frac{e^{-\frac{1}{h}} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{SV(p_0^2 - E_n^2)} \times \\ \times \delta^3(\gamma_1 + \gamma_2 - e^- - e^+). \quad (45)$$

Згідно з відомими правилами КЕД переріз процесу визначається як квадрат амплітуди ймовірності, помножений на інтервал кінцевих станів та поділений на потік  $j$ :

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2 S d^2 p_e S d^2 p_p}{jT (2\pi)^2 (2\pi)^2}, \quad (46)$$

$$j = (1 - \cos \chi)/V, \quad (47)$$

де  $d^2 p_{e(p)} = dp_{e(p)y} dp_{e(p)z}$ ,  $T$  – час,  $\chi$  – кут між фотонами.

Інтегрування (46) за  $d^2 p_p$  можна провести за допомогою  $\delta$ -функцій. Переріз процесу не залежить від  $p_{ey}$ , тому інтеграл по  $dp_{ey}$  зводиться до множення виразу на величину  $p_{ey}$ . Таким чином, виникає множник  $S p_{ey}/V$ . Його можна позбутися, згідно з [28], ототожнивши довжину нормування  $L = V/S$  з координатою центра ларморівської орбіти  $x_0 = p_{ey}/m^2 h$ . Таким чином,

$$\frac{S p_{ey}}{V} = m^2 h. \quad (48)$$

Останній інтеграл по  $dp_{ez}$  знайдемо, використавши співвідношення

$$\delta(\omega_1 + \omega_2 - E_e - E_p) = \frac{m}{2p_{ez}} \sum \delta(p_{ez} \pm \sqrt{m\delta W}). \quad (49)$$

Додатково, виразимо величини  $\alpha_1, \alpha_2$  через більш зручні параметри Стокса:

$$\sin^2 \alpha_j = \frac{1}{2}(1 - \xi_3^{(j)}), \\ \cos^2 \alpha_j = \frac{1}{2}(1 + \xi_3^{(j)}). \quad (50)$$

Остаточно, вираз для резонансного перерізу набуває вигляду

$$\sigma = \alpha^2 \frac{\pi h e^{-\frac{2}{h}}}{8(1 - \cos \chi)} \sqrt{\frac{m}{\delta W}} \frac{(1 - \xi_3^{(1)})(1 + \xi_3^{(2)})}{(g_0 - E_n)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (51)$$

де  $\alpha$  – стала тонкої структури.

### 6. Заключення

Проаналізуємо одержаний вираз (51). Покажемо, що резонансний переріз факторизується на ймовірності процесів першого порядку. В ультраквантовому наближенні ймовірності однофотонного народження  $e^- e^+$  пари та магнітогальмівного випромінювання мають вигляд [27]:

$$\left. \frac{dW_{1,0}^{\text{rad}}}{du} \right|_{u=0} = \alpha \frac{mh^2}{4} (1 - \xi_3^{(1)}), \quad (52)$$

$$W_{1,0}^{pp} = \alpha \frac{mh}{4\sqrt{\delta W/m}} e^{-\frac{2}{h}} (1 + \xi_3^{(2)}) \quad (53)$$

(використано умови (37), (43), (44)).

Таким чином, переріз процесу (51) можна записати у вигляді формули Брейта–Вігнера:

$$\sigma = \frac{2\pi}{m^2 h^2 (1 - \cos \chi)} \frac{\left. \frac{dW_{1,0}^{\text{rad}}}{du} \right|_{u=0} W_{1,0}^{pp}}{(g_0 - E_n)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (54)$$

Насамкінець, оцінимо числове значення перерізу (51) для випадку лобового зіткнення фотонів ( $\chi = \pi$ ). Для прикладу, виберемо такі значення параметрів:

$$\xi_3^{(1)} = -1, \quad \xi_3^{(2)} = 1, \quad (55)$$

$$h = 0, 1, \quad \delta W = mh. \quad (56)$$

Тоді радіаційна ширина та переріз наближено дорівнюють

$$\Gamma \approx 7 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}, \quad (57)$$

$$\sigma \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ бн}. \quad (58)$$

1. G. Baur, K. Hencken and D. Trautmann *et al.*, Phys. Rep. **364**, 359 (2002).
2. G. Baur, K. Hencken, and D. Trautmann, Phys. Rep. **453**, 1 (2007).
3. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*. (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
4. W. Henning, *FAIR Conceptual Design Report*. Gesellschaft für Schwerionenforschung, 2001.
5. G. Soff, J. Reinhardt, and W. Greiner, Phys. Rev. A **23**, 701 (1981).
6. K. Rumrich, W. Greiner and G. Soff, Phys. Lett. A **125**, 394 (1987).
7. G. Soff, J. Reinhardt, Phys. Lett. B **211**, 179 (1988).
8. П. И. Фомін, Р.И. Холодов, Доповіді НАН України **12**, 91 (1998).
9. H. Backe, L. Handschug, F. Hessberger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **40**, 1443 (1978).
10. W. Koenig, F. Bosch, P. Kienle *et al.*, Ztschr. Phys. A **328**, 129 (1987).
11. T. Cowan, H. Backe, K. Bethge *et al.*, Phys. Rev. Lett. **56**, 444 (1986).
12. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Пятаевский, *Квантовая электродинамика* (Москва, Наука, 1989).
13. Г.И. Будкер, А.Н. Скринский, УФН **124**, 561 (1978).
14. И.Н. Мешков, ЭЧАЯ **25**, 1487 (1994).
15. В.В. Пархомчук, А.Н. Скринский, УФН **170**, 473 (2000).
16. N.S. Dikanskii, N. Kh. Kot, V.I. Kudelainen *et al.*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 65 (1988).
17. B. Galnander *et al.*, *HESR Electron Cooler Design study. Technical report*. The Svedberg Laboratory, Uppsala University, 2009.
18. O. Vazhenov *et al.*, *Electron Cooling for HESR. Final Report*, Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 2003.
19. А.И. Ларкин, ЖЭТФ **37**, 264 (1959).
20. И.А. Ахиезер, ЖЭТФ **40**, 954 (1961).
21. Y. Ng and W. Tsai, Phys. Rev. D **16**, 286 (1977).

22. А.А. Козленков, И.Г. Митрофанов, ЖЭТФ **91**, 1978 (1986).
23. П.И. Фомин, Р.И. Холодов, ЖЭТФ **117**, 319 (2000).
24. П.И. Фомин, Р.И. Холодов, УФЖ **44**, 1526 (1999).
25. C. Graziani, A.K. Harding, and R. Sina, Phys. Rev. D **51**, 7097 (1995).
26. O.P. Novak and R.I. Kholodov, Ukr. Phys. J. **53**, 185 (2008).
27. O.P. Novak and R.I. Kholodov, Phys. Rev. D **80**, 025025 (2009).
28. Н.П. Клеников, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).
29. В.И. Ритус, А.И. Никишов, Труды ФИАН им. П.Н. Лебедева **111** (1979).

Одержано 20.02.14

*М.М. Дяченко, А.П. Новак, Р.И. Холодов*

РЕЗОНАНСНОЕ ПОРОГОВОЕ ДВУФОТОННОЕ РОЖДЕНИЕ  $e^-e^+$  ПАРЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА НИЖАЙШИЕ УРОВНИ ЛАНДАУ

Резюме

В работе рассмотрен процесс рождения электрон-позитронной пары двумя фотонами в сильном магнитном поле. Изучена кинематика и найдена общая амплитуда процесса с произвольной поляризацией частиц. Найдены условия резонансного протекания реакции и проведена оценка сечения в случае, когда электрон и позитрон занимают нижайшие уровни ( $l_e = 1, l_p = 0$ ), которые удовлетворяют условиям резонанса.

*М.М. Dyachenko, O.P. Novak, R.I. Kholodov*

RESONANT THRESHOLD TWO-PHOTON  $e^-e^+$  PAIR PRODUCTION ONTO THE LOWEST LANDAU LEVELS IN A STRONG MAGNETIC FIELD

Summary

The process of electron-positron pair production by two photons in a strong magnetic field has been studied. The process kinematics is considered, and the probability amplitude for arbitrary polarizations of particles is found. The resonance conditions are established, and the resonant cross-section is estimated in the case where the electron and the positron occupy the lowest levels ( $l_e = 1, l_p = 0$ ) that satisfy these resonance conditions.