

Я.О. ЛЯШЕНКО,<sup>1,2</sup> Н.М. МАНЬКО<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Сумський державний університет

(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007; e-mail: nabl04@ukr.net, mtashan@rambler.ru)

<sup>2</sup> Peter Grünberg Institut-1

(FZ-Jülich, 52425 Jülich, Germany)

## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ МЕЖОВОГО ТЕРТЯ В РАМКАХ СИНЕРГЕТИЧНОЇ МОДЕЛІ

УДК 621.891

*У даній роботі проведено подальший розвиток синергетичної моделі, яка описує стан ультратонкого шару мастила, що затиснутий між двома атомарно-гладкими твердими поверхнями, які працюють у режимі межового тертя. Проведено математичний аналіз синергетичної моделі з метою пояснення виникнення різних режимів роботи системи при зміні головних параметрів. Тип функціонування трибологічної системи описаний у відповідності з характером стійкості особливих точок. Отримано діаграми, на яких виділено різні режими роботи. Для всіх областей діаграм побудовано фазові портрети, що відповідають різним типам стійкості. Описано переривчастий рух, що часто зустрічається в експериментах.*

*Ключові слова:* межове тертя, сила тертя, зсувні напруження, дивний аттрактор, система Лоренца.

### 1. Вступ

Досить цікавим об'єктом для теоретиків і експериментаторів останнім часом є процеси межового тертя, які протікають в нанорозмірних трибологічних системах [1–5]. За трибологічну можна вважати будь-яку систему, в якій суттєвими є процеси, що протікають при терті контактуючих тіл.<sup>1</sup> Не до кінця вивченим є напрямком, у якому розглядаються атомарно-гладкі тверді поверхні за наявності між ними ультратонкого шару однорідного змащувального матеріалу, при їх відносному русі та з фіксованою відстанню між поверхнями. Використання таких систем для побудови високоточного устаткування і приладів [6] підвищує інтерес до даної проблемної області. Зазначимо, що нанорозмірні системи проявляють аномальні властивості по відношенню до звичайних макроскопі-

чних вузлів тертя. Більшість робіт, присвячених даній темі, мають фундаментальний характер [7–9]. Ультратонкі шари, по відношенню до об'ємних мастил, мають інші температури плавлення та тверднення, немонотонну залежність сили тертя від швидкості, що викликано можливістю мастила перебувати в декількох структурних станах. Однією з яскравих особливостей є наявність переривчастого режиму руху (stick-slip), який зазвичай характерний для систем з сухим тертям [3, 10, 11]. Цей режим має багато особливостей і, незважаючи на досить велику кількість теоретичних і експериментальних робіт (див., наприклад, [12, 13] і наведені там посилання), до цього часу залишається не до кінця вивченим. Такий режим, зважаючи на складність проведення реального експерименту, часто

---

© Я.О. ЛЯШЕНКО, Н.М. МАНЬКО, 2014

<sup>1</sup> Далі розглядається два пружних контактуючих твердих тіла, що знаходяться під навантаженням у стані відносного руху, за наявності між ними тонкої плівки мастила.

описується за допомогою комп'ютерного моделювання [12, 13]. Робота [13] присвячена дослідженню впливу температури на виникнення режиму межового тертя. У [10] експериментально і теоретично показано, що стохастична складова цього режиму (проміжки часу між виникненням "прилипання" і ковзання) є керованою і змінюючи амплітуду сили зсуву можна синхронізувати періоди переривчастого режиму.

Достатня кількість експериментальних робіт стала фундаментом для створення різноманітних теоретичних моделей, що описують процеси межового тертя [7, 8, 14–17]. Необхідно враховувати, що на нанорозмірні системи впливають найменші зміни як внутрішніх (тип мастила [4], структура поверхонь тертя, тиск і т.д.), так і зовнішніх (навантаження на поверхні, швидкість зсуву, тип трибологічної системи) параметрів. Однак, на сьогоднішній день, експериментальні роботи надають інформацію про такі основні властивості, як товщина мастила (кількість молекулярних мастильних шарів), температура, зовнішнє навантаження, ефективна в'язкість, пружні і в'язкі компоненти зсувних напружень і т. п. [6]. У зв'язку з цим з'являється велика кількість феноменологічних моделей, одна з яких розробляється в роботах [18–20].

У рамках синергетичного подання межового тертя за допомогою системи трьох диференціальних рівнянь для напружень, деформації та температури змащувального шару описано нетривіальну поведінку мастила, при взаємному переміщенні поверхонь, що труться [18–20]. Однак, частково невивченим залишається питання впливу параметрів цієї моделі на кінетичні режими динамічного тертя. У попередній роботі [21] показано, що синергетична модель дозволяє описувати незгасаючий переривчастий режим межового тертя в детерміністичному випадку. Дана робота є продовженням [21], у ній проводиться дослідження типу стійкості стаціонарних станів і будуються фазові діаграми з різними режимами функціонування трибологічної системи.

## 2. Основні рівняння і аналіз стійкості

Система основних рівнянь має вигляд [18–20]:

$$\dot{\sigma} = -\sigma + g\varepsilon, \quad (1)$$

$$\tau\dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (2)$$

$$\delta\dot{T} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (3)$$

де  $\sigma$  – зсувна компонента напружень, що виникають у мастилі,  $\varepsilon$  – зсувна компонента відносних деформацій,  $T$  – температура мастила,  $T_e$  – температура поверхонь тертя. Тут також наведені стала  $g < 1$ , що чисельно дорівнює відношенню модуля зсуву мастила  $G$  до його характерного значення  $G_0$ , і параметри

$$\tau = \tau_\varepsilon/\tau_\sigma, \quad \delta = \tau_T/\tau_\sigma, \quad (4)$$

де  $\tau_\sigma$  і  $\tau_\varepsilon$  – часи релаксації напружень  $\sigma$  і деформації  $\varepsilon$  відповідно, а час релаксації температури  $\tau_T$  визначається співвідношенням

$$\tau_T = \rho h^2 c_v / \kappa, \quad (5)$$

де  $\rho$  – густина мастила,  $h$  – товщина змащувального шару,  $c_v$  – питома теплоємність,  $\kappa$  – коефіцієнт теплопровідності. Напруження  $\sigma$ , деформація  $\varepsilon$ , температура  $T$  і час  $t$  в системі (1)–(3) виміряні в одиницях [19]:

$$\sigma_s = \left( \frac{\rho c_v \eta_0 T_c}{\tau_T} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_0}, \quad (6)$$

$$T_s = T_c, \quad t_s = \tau_\sigma,$$

де  $T_c$  – критична температура,  $G_0 = \eta_0/\tau_\varepsilon$  – характерне значення модуля зсуву,  $\eta_0$  – характерне значення зсувної в'язкості, пов'язане з дійсною в'язкістю  $\eta$  в розмірних величинах співвідношенням [22]:

$$\eta = \frac{\eta_0}{T/T_c - 1}. \quad (7)$$

Таким чином,  $\eta = \eta_0$  при значенні розмірної температури  $T = 2T_c$  або при безрозмірному значенні  $T = 2$ .

У роботах [18–20] показано, що нульові стаціонарні напруження  $\sigma_0$  відповідають твердоподібній структурі мастила, а при  $\sigma_0 \neq 0$  мастило плавиться і переходить у рідиноподібний стан. Однією з причин цього є те, що згідно з узагальненою на межовий режим діаграмою Герси–Штрібека [23], зі збільшенням в'язких напружень

$$\sigma_v = F_v/A, \quad (8)$$

зростає в'язка сила тертя

$$F_v = \eta_{\text{eff}} VA/h, \quad (9)$$

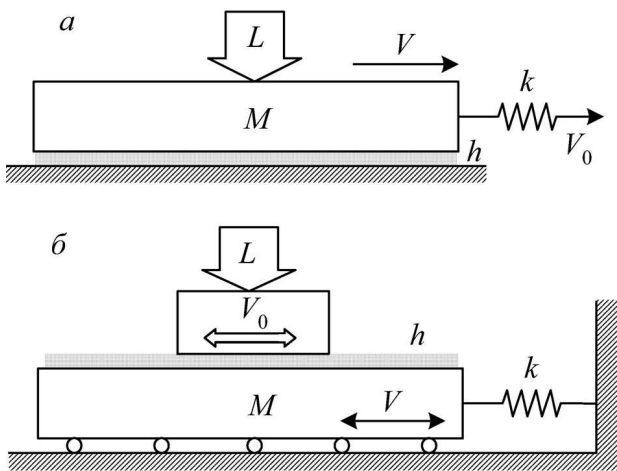


Рис. 1. Механічні аналоги двох типів трибологічних систем

де  $V$  – відносна швидкість руху поверхонь тертя,  $\eta_{\text{eff}}$  – ефективна в'язкість,  $A$  – площа контакту. Враховуючи (8) і (9), отримуємо вираз для швидкості у вигляді

$$V = \sigma_v h / \eta_{\text{eff}}. \tag{10}$$

Оскільки у запропонованій моделі напруження  $\sigma$  є сумою в'язкої і пружної компонент [19], а в шарі рідиноподібного мастила переважають в'язкі напруження, з ростом  $\sigma$  зростає швидкість руху зсувних поверхонь, що відповідає кінетичному режиму ковзання і рідиноподібній структурі мастила. При значенні  $\sigma = 0$  поверхні тертя не рухаються, що відповідає їх "прилипанню" за рахунок тверднення міжповерхневого шару. Дані висновки підтверджуються як теоретично [7], так і експериментально [5].

Вихідна система рівнянь (1)–(3) є якісною, без урахування властивостей конкретної трибологічної системи. Тому вона може описувати особливості межового режиму в трибологічних системах різних типів. Розглянемо дві найбільш поширені з них (рис. 1).

На рис. 1, а подана система, що складається із пружини з жорсткістю  $k$ , яка пов'язана з блоком маси  $M$ , розташованим на нерухомій гладкій поверхні, від якої він відділений шаром мастила товщиною  $h$ . До блока прикладене додаткове нормальне навантаження  $L$ . Вільний кінець пружини рухається з швидкістю  $V_0$ . Система, наведена на рис. 1, б, складається з пружини, з'єднаної з

блоком, що знаходяться на роликах, тертям кочення яких можна знехтувати. На зазначеному блоці розміщений інший блок, швидкість руху  $V_0$  якого змінюється згідно з циклічним законом [9, 24]. За наявності ультратонкого змащувального шару між поверхнями блоків під час руху верхнього рухається і нижній, причому часова залежність швидкості його руху  $V(t)$  принципово залежить від режиму тертя.

Зазначимо, що система, наведена на рис. 1, а, досліджувалася як експериментально, так і в рамках двох термодинамічних моделей [17, 25], що ґрунтуються на теорії фазових переходів Ландау, а також в рамках стохастичної моделі, що враховує взаємодію поверхонь [8]. При цьому модель, розроблена в роботі [17], на відміну від [25], явним чином враховує вплив зовнішнього навантаження  $L$ . Установка, зображена на рис. 1, б, експериментально досліджувалася в роботі [9], а також вивчалася в рамках термодинамічної моделі [24].

Будемо шукати розв'язок системи диференціальних рівнянь (1)–(3) поблизу стаціонарного стану у формі

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha e^{\lambda t}, \tag{11}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta e^{\lambda t}, \tag{12}$$

$$T = T_0 + \gamma e^{\lambda t}, \tag{13}$$

де  $\lambda$  – невідомий інкремент, параметри  $\sigma_0, \varepsilon_0, T_0$  відповідають стаціонарному стану, а амплітуди  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  характеризують невеликі відхилення від цього стану. Підставляючи (11)–(13) в (1)–(3), приходимо до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha \lambda e^{\lambda t} = -\sigma_0 - \alpha e^{\lambda t} + g (\varepsilon_0 + \beta e^{\lambda t}), \tag{14}$$

$$\tau \beta \lambda e^{\lambda t} = -\varepsilon_0 - \beta e^{\lambda t} + (T_0 + \gamma e^{\lambda t} - 1) (\sigma_0 + \alpha e^{\lambda t}), \tag{15}$$

$$\gamma \lambda e^{\lambda t} = T_e - T_0 - \gamma e^{\lambda t} - (\sigma_0 + \alpha e^{\lambda t}) (\varepsilon_0 + \beta e^{\lambda t}) + (\sigma_0 + \alpha e^{\lambda t})^2, \tag{16}$$

які для нульового порядку при  $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$  дають стаціонарні значення. Аналіз останніх рівнянь дозволяє виділити критичну температуру  $T_{c0}$ . При температурі поверхонь тертя  $T_e$  менше величини

$$T_{c0} = 1 + g^{-1}, \tag{17}$$

реалізується стаціонарне значення

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0, \quad T_0 = T_e, \quad (18)$$

а при  $T_e > T_{c0}$ , залежно від початкових умов, встановлюється або значення  $(\sigma_0^+, \varepsilon_0^+, T_0)$ , або  $(\sigma_0^-, \varepsilon_0^-, T_0)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_0^\pm &= \pm \sqrt{\frac{gT_e - 1 - g}{1 - g}}, \\ \varepsilon_0^\pm &= \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{gT_e - 1 - g}{1 - g}}, \quad T_0 = 1 + g^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

що відповідає рідиноподібному режиму тертя. Таким чином, при  $T_e > T_{c0}$  (17) мастило плавиться [18–20].

У першому порядку система (14)–(16) набуває вигляду

$$(\lambda + 1)\alpha - g\beta = 0, \quad (20)$$

$$(1 - T_0)\alpha + (\tau\lambda + 1)\beta - \sigma_0\gamma = 0, \quad (21)$$

$$(2\sigma_0 - \varepsilon_0)\alpha + \sigma_0\beta + (\delta\alpha + 1)\gamma = 0, \quad (22)$$

де фігурують стаціонарні значення  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $T_0$ , тому розв'язки системи для  $T_e$  вище і нижче критичного значення (17) будуть відрізнятися. Розглянемо спочатку діапазон значень  $T_e < T_{c0}$  (твердоподібне мастило). При цьому реалізується стаціонарний стан (18). Умова розв'язання системи (20)–(22) – це рівність нулю її детермінанта:

$$(\delta\lambda + 1) [\tau\lambda^2 + (\tau + 1)\lambda + g(1 - T_e) + 1] = 0. \quad (23)$$

Рівняння (23) має три корені:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(\tau + 1) \pm \sqrt{\tau^2 + (4gT_e - 4g - 2)\tau + 1}}{2\tau}, \\ \lambda_3 &= -1/\delta, \end{aligned} \quad (24)$$

причому корінь  $\lambda_3$  завжди від'ємний. У ситуації з двома іншими комплексно-спряженими коренями, дійсна частина також завжди від'ємна. Від вигляду коренів залежить тип стійкості стаціонарної точки (див. далі).

У рідиноподібному стані мастила ( $T_e > T_{c0}$ ) реалізуються стаціонарні значення (19). У цьому випадку в систему (20)–(22) підставляємо значення

(19), знаходимо детермінант і прирівнюємо його до нуля. Отримуємо кубічне рівняння

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (25)$$

з коефіцієнтами

$$\begin{aligned} A &= 1 + \tau^{-1} + \delta^{-1}, \\ B &= \delta^{-1} + \frac{g(2 - T_e)}{\tau\delta(g - 1)}, \\ C &= \frac{2(gT_e - 1 - g)}{\tau\delta}. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишемо також дискримінант рівняння (25):

$$\Delta = -4A^3C + A^2B^2 - 4B^3 + 18ABC - 27C^2. \quad (27)$$

Якщо  $\Delta > 0$ , то рівняння (25) має три різних дійсних корені. Рівність нулю дискримінанта означає, що два з дійсних коренів збігаються. У ситуації  $\Delta < 0$  маємо один дійсний і два комплексно-спряжених кореня.

Аналізуючи власні числа (24) і розв'язок рівняння (25), побудуємо діаграму з областями, що характеризуються різними значеннями  $\lambda_i$  (рис. 2). Крива, що розділяє області 1 і 5 (рис. 2, *a*), знаходиться з аналізу розв'язку (24), оскільки в цій області  $T_e < T_{c0}$ . Області 1 і 2 на всіх рисунках розділяються умовою (17) (штрихова лінія). Аналіз дискримінанта (27) (рівняння  $\Delta = 0$ ) дозволяє побудувати криву, що відокремлює область 2 від області 3. Додатково введемо умову  $AB = C$  (див. (26)), яка дозволяє побудувати лінію втрати стійкості системи.<sup>2</sup> На рис. 2, *a* це крива, що розділяє області 3 і 4. Існування комплексної частини і знак  $\lambda_i$  визначає тип особливої точки при заданому наборі параметрів  $T_e$ ,  $g$ ,  $\tau$ ,  $\delta$ . Тобто тип стаціонарного режиму при фіксованих параметрах моделі іноді можна визначити заздалегідь за значеннями  $\lambda_i$ . На рис. 2, *a* при вибраних параметрах реалізуються 5 областей. В областях 1 і 5 особлива точка має координати (18) і значення власних чисел знаходяться як (24). Області 2, 3 і 4 побудовані при таких параметрах, що  $T_e > T_{c0}$ , і в них реалізуються особливі точки (19), а власні числа знаходяться як розв'язок рівняння (25).

<sup>2</sup> У цьому випадку (25) може бути записано у вигляді  $(\lambda - a)(\lambda - bI)(\lambda + bI) = \lambda^3 - a\lambda^2 + b^2\lambda - ab^2$ , де  $a$  і  $b$  – дійсні числа,  $I$  – уявна одиниця. Наведену умову можна подати як  $AB = C$  з коефіцієнтами  $A = -a$ ,  $B = b^2$ ,  $C = -ab^2$ .

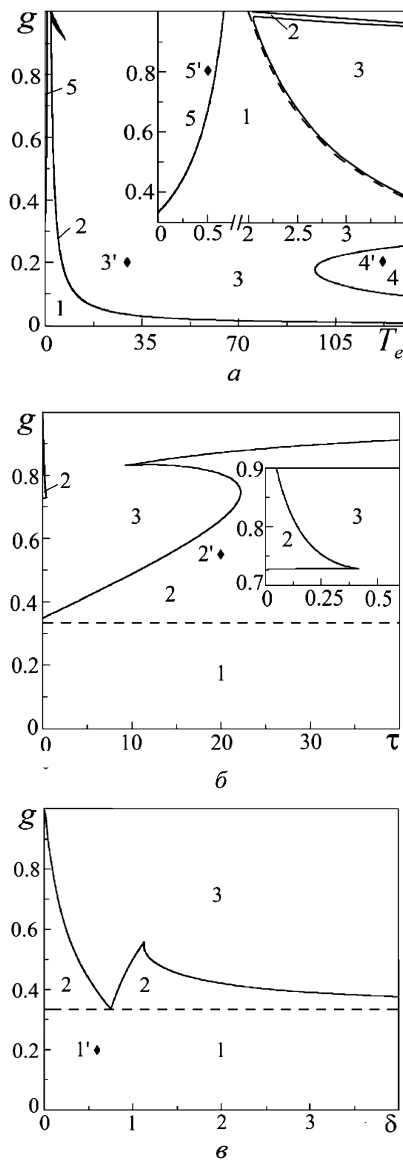


Рис. 2. Діаграми типів стійкості особливих точок: а -  $\tau = 3, \delta = 30$ ; б -  $T_e = 4, \delta = 3$ ; в -  $\tau = 3, T_e = 4$

Корені рівнянь (23), (25) для різних областей діаграми, показаної на рис. 2

№	$\tau$	$\delta$	$g$	$T_e$	$\lambda_{1,2,3}$	Тип точки
1'	3	0,6	0,2	4	-1,6667, -1,2244, -0,1089	стійк. вузол
2'	20	3	0,5	4	-1,0489, -0,2771, -0,0573	стійк. вузол
3'	3	30	0,2	30	-1,3431, -0,0118 ± 0,2816I	стійк. фокус
4'	3	30	0,2	120	-1,3725, 0,0029 ± 0,6076I	сідло-фокус
5'	3	30	0,8	0,5	-0,0333, -0,6667 ± 0,1491I	стійк. фокус

У таблиці вказані корені рівняння (25), а також знайдені значення власних чисел (24) для параметрів всіх п'яти областей (відповідні точки показані ромбами на рис. 2). На рис. 2, а виділено 3 типи особливих точок: стійкий вузол (області 1 і 2), стійкий фокус (області 3 і 5) і сідло-фокус (область 4). Області з однаковим типом стійкості відповідають різним особливим точкам (стаціонарний стан до плавлення (18) і після плавлення (19)). Область 2 (стійкий вузол) на рис. 2, а дуже вузька, але розділяє області 1 і 3 на всьому діапазоні вибраних значень. Для наочності, на рис. 2, а на вставці, наведені області 2 і 5 в збільшеному масштабі (вставка до рисунка наведена з розривом осі  $T_e$ ). Рис. 2, б і в побудовані в інших координатах і мають ті самі області.

Система (1)–(3) зводиться до диференціального рівняння третього порядку [21]:

$$\ddot{\sigma} - \ddot{\sigma} \left( \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - 1 - \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\delta} \right) - \frac{\dot{\sigma}}{\tau} \left( \frac{\dot{\sigma}(\tau + 1)}{\sigma} - \frac{\sigma^2 + 1 + \tau}{\delta} \right) - \frac{\sigma(g(T_e + \sigma^2 - 1) - \sigma^2 - 1)}{\tau\delta} = 0. \quad (28)$$

У рівнянні (28) напруження  $\sigma$  згідно з (10) пропорційні відносній швидкості руху поверхонь тертя  $V$ , тому  $\dot{\sigma}$  – прискорення. Побудуємо фазові портрети системи для всіх областей діаграми. Для цього будемо чисельно розв'язувати рівняння (28) методом Рунге–Кутти 4-го порядку і будувати рисунки для областей діаграми з параметрами з таблиці (для всіх п'яти точок). Стійкий вузол поданий на рис. 3.

При цьому рис. 3, а відповідає температурі  $T_e < T_{c0}$ , при якій реалізується одна стаціонарна точка (18) (область 1). Цей випадок відповідає твердненню мастила з часом. Рис. 3, б відповідає температурі  $T_e > T_{c0}$ . При такій температурі вже реалізуються дві симетричні особливі точки (19) (область 2), що відповідають рідиноподібному мастилу. З вигляду траєкторій на рис. 3, а випливає, що до встановлення стаціонарного стану (зупинка системи) реалізується аперіодичний перехідний режим, у якому напруження релаксують до стійкого значення  $\sigma = 0$ , що відповідають твердоподібній структурі мастила. У цьому випадку рухомий блок, показаний на рис. 1, з часом зупиняється. Це може

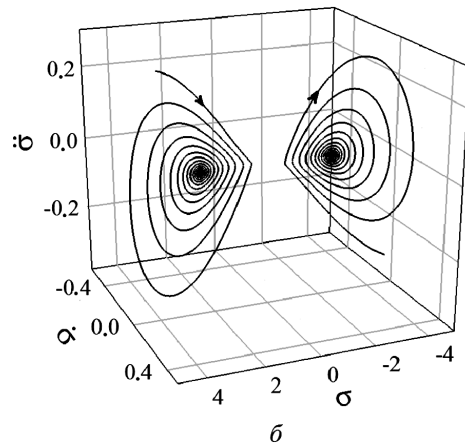
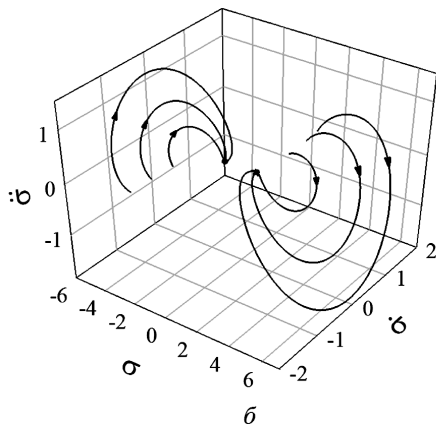
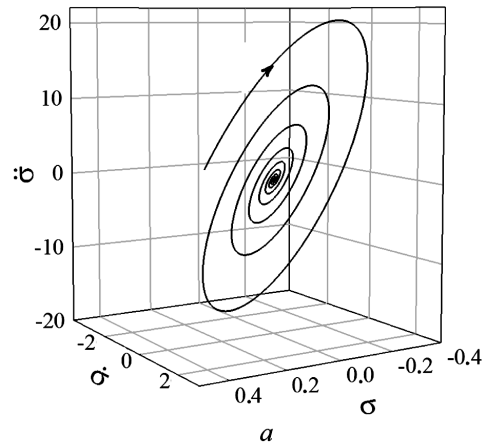
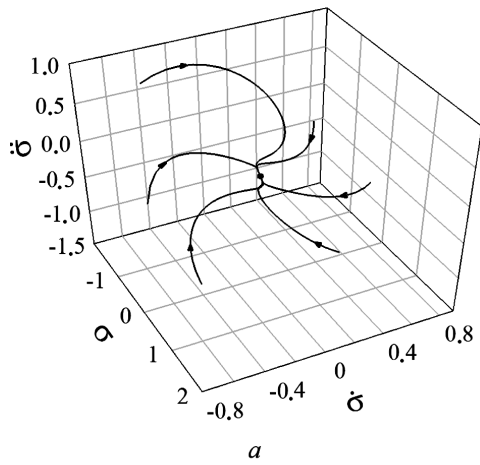


Рис. 3. Фазові портрети рівняння (28), що відповідають параметрам точки 1' (а) і точки 2' (б)

Рис. 4. Фазові портрети, отримані при розв'язанні рівняння (28) при параметрах точки 5' (а) і 3' (б)

здійснюватися у випадку, показаному на рис. 1, а, при значенні швидкості  $V_0 = 0$ . Також ця ситуація описує поведінку системи, показаної на рис. 1, б, при  $V_0 = 0$ , коли спочатку нижній блок не перебуває в стані рівноваги, тобто пружина або стиснута, або натягнута. На рис. 3, б обидві особливі точки еквівалентні і, як і на рис. 3, а, подають стійкі вузли. Однак, при всіх вибраних початкових умовах, із плином часу встановлюється рух зі сталою швидкістю. Така ситуація відповідає трибологічній системі, зображеній на рис. 1, а, при значенні  $V_0 \neq 0$ . При цьому значення  $\sigma < 0$  відповідає руху поверхні тертя з від'ємною швидкістю, тобто руху в зворотному напрямку (реверсивний рух).

Збіжність у вигляді стійкого фокуса також подана двома областями – 3 і 5, де відповідно ре-

алізуються особливі точки (19) і (18). При параметрах області 5 (рис. 4, а) температура менша температури плавлення, тому траєкторії фазового портрету будуть збігатися до особливої точки (18). Фазовий портрет, зображений на рис. 4, б, має параметри області 3, тому відповідає розплавленому мастилу (реалізуються дві ненульові особливі точки). Для даного типу стійкості, у системі тертя, розглянутої в даній роботі, до встановлення руху зі сталою швидкістю (рис. 4, б) або зупинки (рис. 4, а), реалізуються тривалі коливання, а при деяких параметрах траєкторії не збігаються до особливих точок, а реалізується хаотичний режим [21], для з'ясування особливостей якого слід проводити додатковий аналіз. У випадку, показаному на рис. 4, а, рухомий блок (рис. 1, а) згодом також зупиняється, як і на рис. 3, а. Також ця ситуація

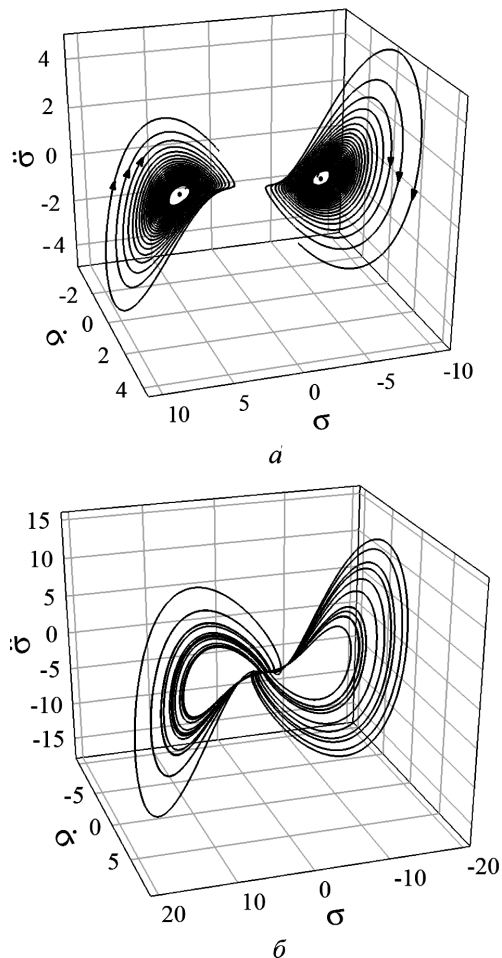


Рис. 5. Фазові портрети рівняння (28) при параметрах точки 4': *a* – поблизу особливих точок; *b* – стаціонарний режим

описує поведінку системи, показаної на рис. 1, *b*, при  $V_0 = 0$ , коли спочатку нижній блок не перебуває в стані рівноваги, тобто пружина або стиснута, або натягнута. Коли з часом встановлюється рух з постійною швидкістю (рис. 4, *b*), ситуація відповідає трибологічній системі, показаній на рис. 1, *a*, при значенні  $V_0 \neq 0$ .

Збіжність у вигляді сідло-фокус може мати властивості або сідла, або фокуса для певного набору параметрів із області. Фазовий портрет, зображений на рис. 5, *a*, характеризується двома симетричними особливими точками, що подають нестійкі фокуси. Розглянута область діаграми відповідає умові (19). У цій області рух зі сталою швидкістю встановлюватися не буде, оскільки з часом

система переходить до хаотичного режиму функціонування. Таким чином, у стаціонарному режимі постійно відбуваються фазові переходи між твердоподібним і рідиноподібним станами мастила. Такий режим не періодичний у часі, а є дивним атрактором, тобто реалізацією детерміністичного хаотичного режиму в системі [21]. Оскільки швидкість руху блока тертя постійно змінює знак, розглянута ситуація описує поведінку системи, показаної на рис. 1, *b*, у якій за рахунок зовнішнього впливу змінюється напрямку руху. Однак, розглянутий реверсивний режим при великих значеннях  $V_0$  реалізується також і в системах, аналог яких наведено на рис. 1, *a*, за рахунок того, що при великій швидкості руху вільного кінця пружини  $V_0$  за час “прилипання” поверхонь (коли  $\sigma = 0$  і мастило твердоподібне) пружина встигає сильно розтягнутися, і при плавленні мастила за рахунок великого значення пружної сили  $k\Delta x$  ( $\Delta x$  – натяг пружини) блок проковзує на істотну відстань, а пружина при цьому стискається, що забезпечує зміну напрямку дії пружної сили. Блок за рахунок цього деякий час може рухатися в зворотному напрямі [21]. Рис. 5, *b* (стаціонарний режим при параметрах рис. 5, *a*) є добре відомим в теорії хаосу “метеликом” Лоренца [26, 27]. Таким чином, на рис. 2 виділені принципово різні режими тертя, і показано, що вони можуть встановлюватися в трибологічних системах різних типів.

### 3. Висновки

У даній роботі проводиться подальше дослідження синергетичної моделі, яка описує стан ультратонкого шару змащувального матеріалу, затиснутого між атомарно-гладкими твердими поверхнями, у процесі межового тертя. Показано, що використовуючи дану модель можна описати поведінку трибологічних систем різних типів. У ході аналізу знайдено кілька стаціонарних значень, які відповідають як сухому, так і рідинному режимам тертя. При цьому знайдені області параметрів, за яких встановлюється той чи інший режим функціонування трибологічної системи. Крім того, виділені різні режими, які можуть мати один з трьох типів збіжності: стійкий вузол, стійкий фокус або сідло-фокус. Для кожного режиму побудовані фазові портрети і описано поведінку трибологічної системи. З'ясовано, що з ростом тем-

ператури поверхонь тертя в системі посилюється стохастичність, а при перевищенні температурою критичного значення система виходить на режим, описуваний атрактором Лоренца. У широкому діапазоні параметрів реалізується реверсивний рух поверхонь тертя. Отримані результати якісно збігаються з відомими експериментальними даними.

Робота виконана за підтримки ДФФД у рамках гранту Президента України GP/F44/010 “Феноменологічна теорія межового тертя у трибологічних наносистемах”, № 0112U007318. Частина результатів отримана за підтримкою МОНМС в рамках проекту “Модельовання тертя металевих наночастинок та межових плівок рідин, що взаємодіють з атомарно-гладкими поверхнями”, № 0112U001380. Робота підтримана стипендією КМУ. Дослідження виконано в період перебування Я.О.Л. в Дослідницькому центрі Юліха (Forschungszentrum Jülich) (Німеччина) на запрошення Б.Н.Й. Перссона (B.N.J.Persson).

1. B.N.J. Persson, *Sliding Friction. Physical Principles and Applications* (Springer, Berlin, 2000).
2. O.A. Mazyar, G.K. Jennings, and C. McCabe, *Langmuir* **25**, 5103 (2009).
3. A. Pertsin and M. Grunze, *Langmuir* **24**, 135 (2008).
4. S. Lee, R. Iten, M. Müller, and N.D. Spencer, *Macromolecules* **37**, 8349 (2005).
5. Sh. Yamada, *Langmuir* **21**, 8724 (2005).
6. J. Israelachvili, *Surf. Sci. Rep.* **14**, 109 (1992).
7. В.Л. Попов, *ЖТФ* **71**, № 5, 100 (2001).
8. A.E. Filippov, J. Klafter, and M. Urbakh, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 135503 (2004).
9. C.-R. Yang, Y.-C. Chiou, and R.-T. Lee, *Tribol. Int.* **32**, 443 (1999).
10. R. Capozza, S.M. Rubinstein, I. Barel, M. Urbakh, and J. Fineberg, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024301 (2011).
11. Я.А. Ляшенко, *ЖТФ* **81**, № 5, 115 (2011).
12. O.M. Braun and M. Peyrard, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 125501 (2008).
13. A. Benassi, A. Vanossi, G.E. Santoro, and E. Tosatti, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 256102 (2011).
14. S. Ciraci and A. Buldum, *Wear* **254**, 911 (2003).
15. O.M. Braun and N. Manini, *Phys. Rev. E* **83**, 021601 (2011).
16. A.I. Volokitin and B.N.J. Persson, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 094502 (2011).
17. І.А. Ляшенко, А.В. Хоменко and Л.С. Метлов, *Tribol. Int.* **44**, 476 (2011).
18. О.В. Хоменко, Я.О. Ляшенко, *Журн. фіз. досл.* **11**, 268 (2007).
19. О.В. Хоменко, Я.О. Ляшенко, В.М. Борисюк, *УФЖ* **54**, 1142 (2009).
20. А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко, *Трение и износ* **31**, 412 (2010).
21. Я.А. Ляшенко, Н.Н. Манько, *Трение и износ* **34**, 50 (2013).
22. А.И. Олемской, Е.А. Торопов, *ФММ* **9**, 5 (1991).
23. G. Luengo, J. Israelachvili, and S. Granick, *Wear* **200**, 328 (1996).
24. Я.А. Ляшенко, *ЖТФ* **81**, № 6, 125 (2011).
25. Я.А. Ляшенко, *ЖТФ* **82**, № 1, 19 (2012).
26. А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, *Основы теории сложных систем* (Пер. Стох. Дин., Москва–Ижевск, 2007).
27. E. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
28. D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).
29. Я.А. Ляшенко, А.В. Хоменко, Л. С. Метлов, *ЖТФ* **80**, № 8, 120 (2010).

Одержано 05.02.13

Я.А. Ляшенко, Н.Н. Манько

#### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГРАНИЧНОГО ТРЕНИЯ В РАМКАХ СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

#### Резюме

В данной работе проводится дальнейшее развитие синергетической модели, описывающей состояние ультратонкого слоя смазочного материала, зажатоого между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями, работающими в режиме граничного трения. Проведен математический анализ синергетической модели в целях объяснения возникновения различных режимов работы системы при изменении основных параметров. Тип функционирования трибологической системы описан в соответствии с характером устойчивости особых точек. Получены диаграммы, на которых выделены различные режимы работы. Для всех областей диаграмм построены фазовые портреты, соответствующие разным типам устойчивости. Описано наблюдаемое экспериментально прерывистое движение.

І.А. Ляшенко, Н.Н. Манько

#### ANALYSIS OF THE STABILITY OF STATIONARY BOUNDARY FRICTION MODES IN THE FRAMEWORK OF A SYNERGETIC MODEL

#### Summary

A synergetic model describing the state of an ultrathin lubricant layer squeezed between two atomically smooth solid surfaces operating in the boundary friction mode has been developed further. To explain the presence of different operation modes of the system for various sets of its main parameters, the mathematical analysis of the synergetic model is carried out. The type of functioning a tribological system is described in accordance with the stability character of singular points, and the diagrams distinguishing various operation modes are obtained. Phase portraits corresponding to different stability types are plotted for all diagram areas. A stick-slip mode of motion that is often observed experimentally is described.