

Р.В. ВЕРБА

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
(Вул. Володимирська, 64, Київ 01601; e-mail: verrv@ukr.net)**СПІНОВІ ХВИЛІ У МАСИВАХ  
МАГНІТНИХ НАНОТОЧОК, ПОВ'ЯЗАНИХ  
МАГНІТОДИПОЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ**

УДК 537.6/.8

*Представлено загальну теорію колективних спін-хвильових збуджень у скінченних та нескінченних періодичних масивах магнітних наноточок, пов'язаних магнітодипольною взаємодією. Теорія враховує неоднорідність статичної та динамічної намагніченості в об'ємі наноточки і дозволяє розраховувати спектри колективних збуджень, їх сталі затухання, ефективність збудження зовнішнім полем, тощо та досліджувати стійкість стаціонарного стану масиву. Запропоновано ефективний спосіб розрахунку властивостей спінових хвиль у періодичних масивах методом проєкцій на власні моди ізольованої наноточки; отримані результати порівняні з експериментальними даними.*

*Ключові слова:* спінові хвилі, магнітні наноточки, магнетні кристали, гільбертів параметр затухання, зона Бріллюена, рівняння Ландау–Ліфшица.

**1. Вступ**

Тривалий час магнітні точки з субмікронними поперечними розмірами розглядалися з точки зору застосування у вигляді елементів магнітної пам'яті з довільним доступом (MRAM) [1, 2]. Останніми роками, коли з'явилась можливість виготовляти великі масиви магнітних точок з відстанню між ними, достатньою для забезпечення помітної магнітодипольної взаємодії, такі масиви почали активно досліджуватись як перспективні штучні матеріали електроніки надвисоких частот (НВЧ) – магнетні кристали (МК) [3–7].

У загальному, МК – це структури з періодичною зміною магнітних параметрів, наприклад, прикладеного магнітного поля [8, 9], намагніченості [4, 5], тощо. Зміна геометрії МК призводить до суттєвих змін структури колективних збуджень – спінових хвиль (СХ), зокрема, можна отримати спектри СХ із властивостями, які не спостерігаються у традиційних суцільних магнітних матеріалах. Також нещодавно теоретично [10] та експериментально [11, 12] було продемонстровано можливість динамічного керування властивостями МК шляхом зміни його основного стану (статичної магнітної конфігурації), яка ґрунтується на мультистабільності масивів дискретних магнітних елементів –

один і той самий масив за однакових зовнішніх умов може знаходитись у кількох різних основних станах.

Теоретичні дослідження колективних збуджень у масивах ускладнені необхідністю врахування далекодії магнітодипольної взаємодії між наноточками. На сьогодні побудована теорія колективних збуджень у масивах довільної геометрії з використанням макроспінового наближення [6]. Таке наближення є справедливим для магнітних точок, які знаходяться у насиченому квазіоднорідному стані, та лише для дослідження основної, однорідної в об'ємі наноточки моди. Хоча даний випадок є одним з найбільш практично важливих, оскільки однорідні моди є найбільш інтенсивними (найкраще збуджуються зовнішнім НВЧ сигналом та дають найбільший відгук), дослідження більш загального випадку також необхідне. Зокрема, неоднорідні моди можуть мати найменшу частоту і, відповідно, визначати стійкість основного стану [13]; також основним станом магнітної точки не завжди є однорідний [14].

Розгляд мод з неоднорідним в об'ємі наноточки профілем у літературі проводився для кількох конкретних геометрій, в основному числовими методами: за допомогою мікромагнітного моделювання [12, 15], методом діагоналізації динамічної матриці [16, 17], числовим розв'язанням системи інтегральних рівнянь [18, 19], тощо. Аналітичний розгляд

© Р.В. ВЕРБА, 2013

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2013. Т. 58, № 8

759

проводився у наближенні слабкого зв'язку для масивів однорідно намагнічених феромагнітних сфер [20, 21] та дисків у вихровому стані [22]. Відзначимо, що аналітичні дослідження спектрів СХ важливі не лише з точки зору проектування МК з бажаними властивостями. Таким чином можна отримати інформацію про область стійкості основного стану масиву та про тип нестійкості і найбільш ймовірний новий основний стан при виході за межі області стійкості; ця інформація є необхідною для створення динамічних МК [10].

У цій роботі буде представлено узагальнення теорії колективних збуджень у двовимірних масивах магнітних точок, яка розвинута у [6], на випадок неоднорідної в об'ємі наноточки статичної чи/та динамічної намагніченості. Як ми переконаємося, відхід від макроспінового наближення не змінить принципово властивості колективних СХ мод (розділ 2), однак суттєво ускладнить задачу розрахунку спектрів СХ – у загальному випадку вона зведеться до розв'язання системи інтегрально-диференціальних рівнянь і може бути вирішена точно лише числовими методами. У розділі 3 буде представлений один з можливих способів її наближеного вирішення за допомогою методу проєкцій. Розраховані цим методом спектри будуть порівняні з експериментальними даними з літератури.

## 2. Загальні властивості колективних збуджень масиву магнітних точок

### 2.1. Вихідні рівняння

Будемо розглядати двовимірний масив магнітних точок, що лежать в одній площині ( $x - y$ , для визначеності). Позиція наноточки (точніше, її центра) задається радіус-вектором  $\mathbf{R}_j$ , де  $j$  – довільний індекс, який нумерує точки в масиві. Вважатимемо, що масив поміщений в однорідне зовнішнє поле  $\mathbf{V}_e$ . Також для спрощення знехтуємо кристалграфічною анізотропією, що справедливо для магнітних елементів, виготовлених з магнітом'якої речовини, наприклад, з пермалою; її врахування не внесе ніяких принципових змін у викладену нижче теорію.

Стан магнітної наноточки повністю описується розподілом намагніченості  $\mathbf{M}_j(\mathbf{r}_j)$ , який визначений у межах  $j$ -ї наноточки, причому  $|\mathbf{M}_j(\mathbf{r}_j)| = M_s$ , де  $M_s$  – намагніченість насичення. Консе-

рвативна динаміка намагніченості описується системою рівнянь Ландау–Ліфшица [23]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_j(\mathbf{r}_j, t)}{\partial t} = \gamma (\mathbf{V}_{\text{eff},j} \times \mathbf{M}_j(\mathbf{r}_j, t)), \quad (1)$$

де  $\gamma \approx 2\pi \cdot 28$  ГГц/Т – модуль гіромагнітного відношення для спіну електрона. Ефективне поле, яке діє на  $j$ -у наноточку, дорівнює

$$\mathbf{V}_{\text{eff},j} = \mathbf{V}_e - \mu_0 \sum_l \hat{\mathbf{G}}_{jl} * \mathbf{M}_l, \quad (2)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна проникність вакууму. Тензорний оператор  $\hat{\mathbf{G}}_{jl} = \hat{\mathbf{G}}^{(\text{ex})} \delta_{jl} + \hat{\mathbf{G}}_{jl}^{(\text{d})}$  складається з оператора обмінної енергії [23]:

$$\hat{\mathbf{G}}^{(\text{ex})} = -\alpha_{\text{ex}}^2 \nabla^2 \hat{\mathbf{I}}, \quad (3)$$

де  $\alpha_{\text{ex}}$  – обмінна довжина,  $\hat{\mathbf{I}}$  – одинична матриця, та інтегрального оператора магнітодипольної взаємодії, компоненти якого у декартовій системі координат рівні

$$\left[ \hat{\mathbf{G}}_{jl}^{(\text{d})} \right]_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}'_l \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_l|}, \quad (4)$$

де  $\alpha, \beta = x, y, z$  [24]. При виводі рівняння (4) використовується магнітостатичне наближення, яке справедливе за умови  $k \gg \omega/c$ , де  $k$  та  $\omega$  – хвильове число та частота СХ,  $c$  – швидкість світла. Ці умови цілком задовольняються для коливань і хвиль НВЧ-діапазону у феромагнетиках. Відзначимо також, що повна магнітна енергія масиву виражається як

$$W = -\sum_j \int \mathbf{V}_e \mathbf{M}_j d^3 \mathbf{r}_j + \frac{\mu_0}{2} \sum_{j,l} \int \mathbf{M}_j \hat{\mathbf{G}}_{jl} * \mathbf{M}_l d^3 \mathbf{r}_j. \quad (5)$$

### 2.2. Колективні збудження у скінченних масивах наноточок

Запишемо намагніченість  $j$ -ї магнітної точки в стаціонарному стані у вигляді  $\mathbf{M}_j = M_s \boldsymbol{\mu}_j$ , де  $\boldsymbol{\mu}_j(\mathbf{r}_j)$  – одиничний вектор. Стаціонарний стан масиву визначається з умови рівності нулю усіх похідних по часу в системі (1), яка зводиться до умови паралельності стаціонарної намагніченості та ефективного поля у кожній магнітній точці:

$$B_j \boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{V}_e - \mu_0 M_s \sum_l \hat{\mathbf{G}}_{jl} * \boldsymbol{\mu}_l, \quad (6)$$

де  $B_j$  – множники Лагранжа (вони природним чином з’являються, якщо шукати стаціонарні стани еквівалентним шляхом – пошуком точок екстремуму функціонала повної енергії (5) у просторі функцій  $\mu_j$  за умови  $|\mu_j|^2 = 1$ ). Величина  $B_j$  має сенс модуля ефективного поля у  $j$ -й наноточці у стаціонарному стані  $\mu_j$  і, в загальному випадку, є функцією координат,  $B_j = B_j(\mathbf{r}_j)$ . Принципово, розв’язуючи систему рівнянь (6), доповнену умовами  $|\mu_j| = 1$ , можна знайти усі можливі стаціонарні (але не обов’язково стійкі) стани масиву та відповідні їм розподіли ефективного поля  $B_j$ . Однак, у багатьох випадках, задачу пошуку множини стаціонарних станів можна спростити. Для квазіоднорідного стану магнітних точок доречно користуватись макроспіновим наближенням [6], для вихрового стану – моделлю жорсткого вихору [14], тощо. При цьому система рівнянь (6) зводиться до простої системи алгебраїчних рівнянь. Лише у проміжних випадках потрібно числовими методами розв’язувати повну систему інтегрально-диференціальних рівнянь.

Для знаходження динамічних рівнянь для малих (лінійних) збуджень стаціонарного стану представимо намагніченість у вигляді суми основного стану  $\mu_j$  та малих відхилень від нього  $\mathbf{m}_j$ ,  $|\mathbf{m}_j| \ll 1$ :

$$\mathbf{M}_j(\mathbf{r}_j, t) = M_s [\mu_j(\mathbf{r}_j) + \mathbf{m}_j(\mathbf{r}_j, t)] + O(|\mathbf{m}_j|^2).$$

Оскільки загальна довжина вектора намагніченості  $\mathbf{M}_j$  всюди повинна зберігатись, то вектори  $\mu_j$  та  $\mathbf{m}_j$  мусять бути ортогональними, тобто  $\mu_j(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{m}_j(\mathbf{r}_j) = 0 \forall \mathbf{r}_j$ .

Підставляючи розвинення для намагніченості  $\mathbf{M}_j$  у рівняння (1), використовуючи рівняння (6) та умову ортогональності, можна отримати динамічне рівняння для безрозмірної намагніченості  $\mathbf{m}_j$ , з якого випливає таке рівняння для частот  $\omega_\nu$  та профілів  $\mathbf{m}_{j,\nu}$  власних мод масиву:

$$-i\omega_\nu \mathbf{m}_{\nu,j} = \mu_j \times \sum_l \hat{\Omega}_{jl} * \mathbf{m}_{\nu,l}, \quad (7)$$

у якому ми залишили лише лінійні по  $\mathbf{m}_j$  члени, а індекс  $\nu$  нумерує різні моди масиву. Тензорний оператор  $\hat{\Omega}_{jl}$  визначається як

$$\hat{\Omega}_{jl} = \gamma B_j \delta_{jl} \hat{\mathbf{I}} + \omega_M \hat{\mathbf{G}}_{jl}, \quad (8)$$

де  $\omega_M = \gamma \mu_0 M_s$ .

Оператор  $\hat{\Omega}_{jl}$  є дійсним і самоспряженим, тобто для довільних векторних функцій  $\mathbf{f}(\mathbf{r}_j)$  та  $\mathbf{g}(\mathbf{r}_l)$ , визначених у межах  $j$ -ї та  $l$ -ї наноточок відповідно, виконується рівність

$$\int \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_j) \hat{\Omega}_{jl} * \mathbf{g}(\mathbf{r}_l) d^3 \mathbf{r}_j = \int \mathbf{g}(\mathbf{r}_l) \hat{\Omega}_{lj} * \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}_l.$$

Використовуючи цю властивість, можна отримати співвідношення ортогональності колективних СХ мод:

$$\sum_j \langle \mathbf{m}_{\nu',j}^* \mu_j \times \mathbf{m}_{\nu,j} \rangle_j = -i A_\nu \delta_{\nu,\nu'}, \quad (9)$$

де символи  $\langle \dots \rangle_j$  означають усереднення по об’єму  $j$ -ї магнітної точки  $V_j$ :

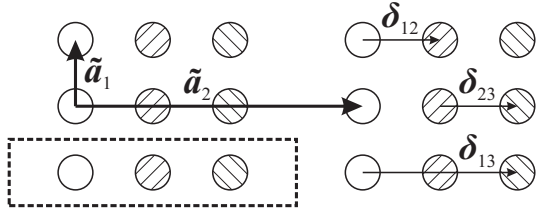
$$\langle f \rangle_j = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} f d^3 \mathbf{r}_j.$$

Співвідношення (9) виконується для СХ мод масиву у будь-якому стійкому стані; воно порушується лише для нестійких станів з сідловим типом нестійкості (коли власні частоти стають уявними), які, очевидно, не реалізуються на практиці.

Із врахуванням дійсності оператора  $\hat{\Omega}_{jl}$  з рівняння (7) випливає, що якщо  $\mathbf{m}_{\nu,j}$  – власна функція з частотою  $\omega_\nu$ , то  $\mathbf{m}_{\nu',j}^*$  теж буде власною функцією з частотою  $(-\omega_\nu)$ . Подібне “дублювання” розв’язків пов’язане з тим, що динамічна намагніченість  $\mathbf{m}_j$  є дійсною величиною, тому її спектр містить і додатні, і від’ємні частоти. Лише половина формальних розв’язків рівняння (7) описує “фізичні” моди  $\mathbf{m}_{\nu,j}$ , інші відповідають формальним спряженим модам  $\mathbf{m}_{\nu',j}^*$ . Відзначимо, що поділ мод на справжні та спряжені не є однозначним; надалі домовимось називати справжніми моди з додатною частотою  $\omega_\nu$ . З урахуванням цього динамічна компонента намагніченості виражається через суму власних мод, як

$$\mathbf{m}_j(t) = \sum_\nu (\mathbf{m}_{\nu,j} c_\nu(t) + \text{к.с.}),$$

де сума береться лише по “фізичним” модам,  $c_\nu(t)$  означає комплексну амплітуду  $\nu$ -ї моди, а к.с. позначає комплексно спряжену величину. Підставляючи дане розвинення у рівняння (5) і використовуючи співвідношення ортогональності, отримуємо, що зміни магнітної енергії системи, викликані



**Рис. 1.** Ілюстрація складної періодичної ґратки, що містить  $P = 3$  точок в елементарній комірці. Кругами з різною заливкою позначені магнітні точки, які належать до різних надґраток. Штриховою лінією показана елементарна комірка надґратки

збудженням власних мод, виражаються через їхні амплітуди як

$$\Delta W = \frac{M_s V}{\gamma} \sum_{\nu} \omega_{\nu} A_{\nu} |c_{\nu}|^2. \quad (10)$$

Якщо стаціонарна магнітна конфігурація  $\mu_j$  відповідає локальному мінімуму повної магнітної енергії  $W$ , то величина  $\Delta W$  має бути позитивно-визначеною. Це забезпечується, якщо «фізичні» моди мають додатні норми  $A_{\nu} > 0$ . Якщо ж ми формально розглядаємо стаціонарний стан, що відповідає максимуму енергії, то  $\Delta W < 0$ , що можливо, якщо хоча б деякі зі справжніх мод мають від’ємні норми. Отже, рівняння (10) дає зручний спосіб дослідження стійкості стаціонарних станів масивів наноточок – стійкими є лише ті стани, для яких усі частоти власних мод  $\omega_{\nu}$  є дійсними (інакше реалізується сідлова нестійкість), і для всіх мод виконується нерівність  $\omega_{\nu} A_{\nu} > 0$  (інакше стан відповідає особливій точці типу нестійкий фокус). Тут враховано, що норма спряженої моди протилежна за знаком до норми фізичної моди (див. (9)).

Представлений формалізм може використовуватися для числових розрахунків спектрів колективних збуджень у скінченних масивах магнітних точок у довільному стаціонарному стані. Однак, у загальному випадку, знаходження СХ спектрів зводиться до складної задачі пошуку власних чисел та функцій системи інтегрально-диференціальних рівнянь. Один з наближених методів її розв’язання буде розглянутий нижче.

### 2.3. СХ у періодичних масивах

Важливими стаціонарними конфігураціями масивів магнітних точок, впорядкованих у періодичну

ґратку, є періодичні основні стани. До таких станів, зокрема, відносяться феромагнітний стан, у якому розподіли намагніченості в усіх наноточках однакові, та різні антиферомагнітні стани, які за відсутності зовнішнього магнітного поля зазвичай є справжніми основними станами масивів (тобто відповідають глобальному мінімуму повної енергії) [25, 26]. Якщо період стану суттєво менший за розміри масиву, то доцільно розглядати такі масиви, як нескінченні. Для цього необхідно трохи змінити формалізм, викладений у попередньому підрозділі.

У загальному випадку періодичного основного стану до елементарної комірки магнітної надґратки належить  $P \geq 1$  магнітних точок. Відзначимо, що  $P = 1$  лише для масиву точок, упорядкованих у просту (косокутну) ґратку, який знаходиться у феромагнітному стані. В усіх інших випадках магнітна надґратка буде складною ( $P > 1$ ), причому складна періодичність може задаватися як складною структурою ґратки наноточок, так і складним (не феромагнітним) основним станом. Періодичність у масиві задається базисними векторами  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  та  $\tilde{\mathbf{a}}_2$ , які формують надґратку  $\mathcal{SL}$ :

$$\mathcal{SL} = \{n_1 \tilde{\mathbf{a}}_1 + n_2 \tilde{\mathbf{a}}_2 \mid n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 \in \mathbb{Z}\}. \quad (11)$$

Кожна магнітна точка, яка знаходиться у позиції  $j_p$ , належить до певної  $p \in [1, P]$  надґратки (у сенсі рівняння (11)). Різні надґратки зсунуті одна відносно одної на вектори  $\delta_{pq}$ ; сума усіх  $P$  надґраток дає позиції усіх магнітних точок у масиві (див. приклад на рис. 1). Зрозуміло, що стаціонарні розподіли намагніченості  $\mu_j(\mathbf{r}_j)$  та внутрішнє магнітне поле  $B_j$  залежать лише від індексу надґратки  $p$ :  $\mu_{j_p} = \mu_p$ ,  $B_{j_p} = B_p$ . Отже, загальна умова рівноваги (6) зводиться до  $P$  рівнянь,

$$B_p \mu_p = \mathbf{B}_e - \mu_0 M_s \sum_q \hat{\mathbf{G}}_0(\delta_{pq}) * \mu_q, \quad (12)$$

де

$$\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta_{pq}) = \sum_{\mathbf{R}_{j_p} \in \mathcal{SL}} \hat{\mathbf{G}}_{j_p j_q} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{R}_{j_p} - \mathbf{R}_{j_q})}. \quad (13)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta)$  є самоспряженим, також очевидно, що  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta) = \hat{\mathbf{G}}_{-\mathbf{k}}^*(\delta)$ . Крім того,  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_S}(\delta) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta) e^{-i\mathbf{k}_S \cdot \delta}$  для довільного вектора оберненої надґратки  $\mathbf{k}_S \in \mathcal{SL}^*$ .

Лінійні СХ збудження будемо шукати у вигляді плоских хвиль

$$\mathbf{m}_{j_p} = \mathbf{m}_{\mathbf{k},p} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_{j_p}},$$

де хвильовий вектор  $\mathbf{k}$  належить до першої зони Бріллюена оберненої надгратки  $\mathcal{SL}^*$ . Використовуючи даний анзац у рівнянні (7), отримуємо скінченно-розмірну задачу на власні значення для частот  $\omega_{\mathbf{k}}$  та профілів  $\mathbf{m}_{\mathbf{k},p}$  СХ мод:

$$-i\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{m}_{\mathbf{k},p} = \mu_p \times \sum_q \hat{\Omega}_{\mathbf{k},pq} * \mathbf{m}_{\mathbf{k},q}, \quad (14)$$

у якій тензорний оператор  $\hat{\Omega}_{\mathbf{k}}$  визначається як

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{k},pq} = \gamma B_p \delta_{pq} \hat{\mathbf{I}} + \omega_M \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta_{pq}). \quad (15)$$

Для заданого значення хвильового вектора  $\mathbf{k}$  задача на власні значення (14) є  $2P$ -вимірною системою лінійних інтегрально-диференціальних рівнянь. Розв'язавши її, ми отримаємо комплексні амплітуди СХ мод  $\mathbf{m}_{\mathbf{k},p}$  та відповідні частоти  $\omega_{\mathbf{k}}$ , усього  $2P$  розв'язків. Дійсна СХ мода має вигляд

$$\mathbf{m}_{j_p} \sim \cos[\mathbf{k}\mathbf{R}_{j_p} - \omega_{\mathbf{k}}t + \phi]$$

і записується через комплексні амплітуди як

$$\mathbf{m}_{j_p} = \mathbf{m}_{\mathbf{k},p} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R}_{j_p} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{к.с.}$$

Функція  $\mathbf{m}_{\mathbf{k},p}^*$  є розв'язком задачі, спряженої до (14). Однак, як це впливає з властивостей оператора  $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{k}}(\delta)$ ,  $\mathbf{m}_{\mathbf{k},p}^*$  є також власною функцією задачі з протилежним напрямком хвильового вектора  $\mathbf{k}$ , оскільки  $\hat{\Omega}_{\mathbf{k}} = \hat{\Omega}_{-\mathbf{k}}^*$ . Таким чином, задача на власні значення (14) описує одночасно хвилі у додатному відносно  $\mathbf{k}$  напрямку (їм відповідають розв'язки з  $\omega_{\mathbf{k}} > 0$ ) та від'ємному ( $\omega_{\mathbf{k}} < 0$ ), тому поділ мод на справжні та формальні спряжені, який мав місце при розгляді скінченних масивів, тут не має сенсу. Звісно, розглядаючи хвилі лише в заданому напрямку, необхідно брати до уваги лише половину розв'язків (тобто у загальному випадку спектр СХ у масиві матиме  $P$  гілок).

СХ у періодичних масивах мають аналогічні до колективних мод скінченних масивів властивості. Зокрема, СХ різних гілок спектра є ортогональними у сенсі

$$\sum_p \langle \mathbf{m}_{\mathbf{k},\lambda,p}^* \mu_p \times \mathbf{m}_{\mathbf{k},\lambda',p} \rangle = -i A_{\mathbf{k},\lambda} \delta_{\lambda,\lambda'},$$

де індекс  $\lambda$  нумерує гілки спектра. Також залишається у силі умова стійкості стаціонарного стану – стан є стійким лише коли усі частоти  $\omega_{\mathbf{k},\lambda}$  є дійсними та виконується нерівність  $\omega_{\mathbf{k},\lambda} A_{\lambda} > 0$  для усіх значень хвильового вектора у першій зоні Бріллюена.

#### 2.4. Вплив малих збурень

Вище ми розглядали ідеалізовану консервативну систему. Вплив дисипації зручно розглядати в рамках теорії збурень. Звісно, теорія збурень може бути застосована для розгляду не лише затухання СХ, а й багатьох інших малих ефектів, наприклад, збудження СХ мод зовнішнім НВЧ полем, впливу теплових шумів, тощо. У даному пункті буде побудований аналог загальновідомої з квантової механіки нестационарної теорії збурень [27] для масивів магнітних точок. Для визначеності будемо розглядати скінченні масиви; у випадку періодичних масивів ніяких принципових змін не буде, тільки суми по всіх модах треба замінити на суми по гілках спектра та значенням хвильового вектора.

У загальному випадку збурене рівняння Ландау–Ліфшица для намагніченості наноточки  $\mathbf{M}_j(t)$  можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial t} = \gamma (\mathbf{B}_{\text{eff},j} \times \mathbf{M}_j) + \gamma (\mathbf{b}_j \times \mathbf{M}_j),$$

де  $\mathbf{b}_j$  – ефективне поле збурення, яке може залежати від часу чи/та від намагніченості  $\mathbf{M}_l$ . Будемо розглядати лише лінійні процеси. У цьому випадку намагніченість кожної наноточки можна розвинути у ряд по власних колективних модах масиву (звісно, необхідно враховувати лише справжні моди, з додатною частотою):

$$\mathbf{M}_j(t) = M_s \left[ \boldsymbol{\mu}_j + \sum_{\nu} (\mathbf{m}_{\nu,j} c_{\nu}(t) + \text{к.с.}) \right].$$

Підставляючи дане розвинення у збурене динамічне рівняння і враховуючи співвідношення ортогональності (9) для колективних мод  $\mathbf{m}_{\nu,j}$ , отримуємо динамічне рівняння для амплітуд СХ мод  $c_{\nu}(t)$ :

$$\frac{dc_{\nu}}{dt} = -i\omega_{\nu} c_{\nu} + i\gamma b_{\nu} - i\gamma \sum_{\nu'} \left( S_{\nu,\nu'} c_{\nu'} + \tilde{S}_{\nu,\nu'} c_{\nu'}^* \right), \quad (16)$$

з такими коефіцієнтами:

$$b_\nu = \frac{1}{A_\nu} \sum_j \langle \mathbf{m}_{\nu,j}^* \mathbf{b}_j \rangle_j, \quad (17a)$$

$$S_{\nu,\nu'} = \frac{1}{A_\nu} \sum_j \langle (\mathbf{m}_{\nu,j}^* \mathbf{m}_{\nu',j}) (\boldsymbol{\mu}_j \mathbf{b}_j) \rangle_j, \quad (17b)$$

$$\tilde{S}_{\nu,\nu'} = \frac{1}{A_\nu} \sum_j \langle (\mathbf{m}_{\nu,j}^* \mathbf{m}_{\nu',j}^*) (\boldsymbol{\mu}_j \mathbf{b}_j) \rangle_j. \quad (17c)$$

У випадку, коли поле збурення  $\mathbf{b}_j$  є зовнішнім НВЧ полем, доданок  $i\gamma b_\nu$  у рівнянні (16) описує лінійне збудження СХ мод, два інші доданки – параметричні процеси при паралельній накачці. Відзначимо, що якщо поле збурення залежить від динамічної складової намагніченості, то у рівнянні (16) потрібно залишити лише доданки нульового та першого порядку по амплітудах СХ мод  $c_\nu$ , оскільки для нелінійних процесів розвинення намагніченості по власних модах не є повним, і його використання може привести до некоректних результатів.

Розглянемо два практично важливих приклади застосування теорії збурень: врахування дисипації та збудження колективних мод зовнішнім полем. У першому випадку, з використанням форми Гільберта для дисипативного доданка [23], поле збурення записується у вигляді

$$\mathbf{b}_j = -\frac{\alpha_G}{\gamma M_s} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial t},$$

де  $\alpha_G$  – гільбертів параметр затування. Розрахувавши коефіцієнти (17) для даного збурення, отримуємо рівняння для амплітуд СХ мод:

$$\frac{dc_\nu}{dt} = -i\omega_\nu c_\nu - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu,\nu'} c_{\nu'}, \quad (18)$$

у якому сталі затування дорівнюють

$$\Gamma_{\nu,\nu'} = \alpha_G \omega_{\nu'} \left( \frac{1}{A_\nu} \sum_j \langle \mathbf{m}_{\nu,j}^* \cdot \mathbf{m}_{\nu',j} \rangle_j \right). \quad (19)$$

Як бачимо, у загальному випадку затування може привести до зв'язку між різними СХ модами. Однак, якщо колективні моди не вироджені (по частоті), то цим зв'язком можна знехтувати і користуватись стандартним рівнянням дисипативного

осцилятора зі сталою затування  $\Gamma_\nu = \Gamma_{\nu,\nu}$ . У випадку вироджених мод для коректного опису затування необхідно враховувати недиагональні члени  $\Gamma_{\nu,\nu'}, \nu' \neq \nu$  для усіх мод з однаковими частотами  $\omega_\nu = \omega_{\nu'}$ . Як видно з рівняння (19), стала затування залежить від еліптичності СХ моди; лише для моди з круговою поляризацією у кожній магнітній точці стала затування дорівнює  $\Gamma_\nu = \alpha_G \omega_\nu$ , в інших випадках  $\Gamma_\nu > \alpha_G \omega_\nu$  (строго кажучи, коефіцієнт пропорційності в дужках у рівнянні (19) при  $\nu = \nu'$  змінюється в межах  $[1, \infty]$  і зростає зі зростанням еліптичності прецесії  $\varepsilon$  [23], однак у загальному випадку явну залежність між ними отримати не вдається).

Пряме збудження СХ зовнішнім НВЧ полем з частотою  $\omega$  описується полем збурення  $\mathbf{b}_j = (\mathbf{b}_{e,j} e^{-i\omega t} + \text{к.с.})$ . З урахуванням дисипації (у невиродженому випадку) динамічне рівняння для амплітуд  $c_\nu$  має вигляд

$$\frac{dc_\nu}{dt} = -i\omega_\nu c_\nu - \Gamma_\nu c_\nu + i\gamma b_{e,\nu} e^{-i\omega t},$$

у якому амплітуда зовнішньої сили дорівнює

$$b_{e,\nu} = \frac{1}{A_\nu} \sum_j \langle \mathbf{m}_{\nu,j}^* \cdot \mathbf{b}_{e,j} \rangle_j.$$

Використовуючи представлені вище рівняння можна просто розрахувати спектри поглинання НВЧ випромінювання масивом взаємодіючих наноточок. Зокрема, у практично важливому випадку збудження просторово однорідним НВЧ полем ( $\mathbf{b}_{e,j} = \mathbf{b}_e$ ) потужність, що поглинається масивом, виражається як

$$P = \frac{\omega V N_d}{\mu_0} \mathbf{b}_e^* \hat{\chi}''(\omega) \mathbf{b}_e, \quad (20)$$

де  $N_d$  – кількість наноточок у масиві. Тензор ефективної проникності масиву магнітних точок  $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}'(\omega) + i\hat{\chi}''(\omega)$  виражається через частоти та профілі власних мод таким чином:

$$\hat{\chi}(\omega) = \gamma \mu_0 M_s \sum_\nu \frac{\hat{\chi}_\nu}{(\omega_\nu - \omega) - i\Gamma_\nu}, \quad (21a)$$

$$\hat{\chi}_\nu = \frac{1}{N_d A_\nu} \sum_{j,l} \langle \mathbf{m}_{\nu,j} \rangle_j \otimes \langle \mathbf{m}_{\nu,l}^* \rangle_l, \quad (21b)$$

де символ  $\otimes$  позначає прямий декартовий добуток векторів.

Отже, усі практично важливі характеристики масиву магнітних точок можна знайти, знаючи частоти  $\omega_\nu$  колективних СХ мод та їх профілі  $\mathbf{m}_{\nu,j}$ . Відзначимо, що для випадку нескінченних періодичних масивів рівняння (19) та (21) залишаються такими ж, тільки сума по наноточках масиву замінюється на суму по надгратках  $i$ , очевидно, у виразі для тензора ефективної проникності враховуються лише СХ з нульовим хвильовим вектором.

### 3. Розрахунок спектрів СХ

#### 3.1. Метод проєкцій

Розглянемо тепер, як можна наближено розрахувати спектри колективних збуджень масиву з урахуванням неоднорідності статичної чи динамічної намагніченості в об'ємі магнітної точки. Будемо вважати, що основний стан масиву  $\mu_j$  нам відомий; питання його знаходження, тобто розв'язання рівняння (6), виходить за межі даної роботи. Також для спрощення вважатимемо усі магнітні точки однаковими, хоча це припущення не є принциповим для застосування викладеного нижче методу.

Використаємо метод проєкцій, тобто спроекуємо справжній розв'язок  $\mathbf{m}_j(\mathbf{r}_j)$  рівняння (7) на деякий повний базис векторних функцій  $\mathbf{m}_\lambda(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{m}_j(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda,j} \mathbf{m}_\lambda(\mathbf{r}_j).$$

У ролі базису зручно використовувати власні моди ізольованої наноточки чи будь-який інший ортогональний базис (у сенсі рівняння (9), звісно, без суми по наноточках). Відзначимо, що у першому випадку необхідно враховувати як "фізичні", так і формальні спряжені моди, оскільки лише такий базис є повним. Спроекувавши рівняння (7) на базис, отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{\lambda'} a_{\lambda',j} A_{\lambda} \tilde{\omega}_{\lambda\lambda'} + \omega_M \sum_{\lambda',l} a_{\lambda',l} N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R}_{jl}) = \omega a_{\lambda} A_{\lambda}, \quad (22)$$

коефіцієнти якої дорівнюють

$$\tilde{\omega}_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{A_{\lambda}} \langle \mathbf{m}_{\lambda}^*(\mathbf{r}_j) (\gamma B_j + \omega_M \hat{\mathbf{G}}^{(ex)}) * \mathbf{m}_{\lambda'}(\mathbf{r}_j) \rangle_j,$$

$$N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R}_{jl}) = \langle \mathbf{m}_{\lambda}^*(\mathbf{r}_j) \hat{\mathbf{G}}_{jl}^{(d)} * \mathbf{m}_{\lambda'}(\mathbf{r}_l) \rangle_j.$$

де  $A_{\lambda}$  – норма базисної моди  $\mathbf{m}_{\lambda}$ ,  $\mathbf{R}_{jl} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l$ . Найбільшу складність становить розрахунок коефіцієнтів  $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R})$  – фактично, кожен коефіцієнт виражається через інтеграл по шести (чи чотирьох у випадку квазідвовимірних мод) змінним (див. (4)). Покажемо, як можна їх ефективно розрахувати.

У [28] показано, що величини  $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R})$  можна представити через зворотне фур'є-перетворення, як

$$N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R}) = \frac{1}{V} \int \mathbf{D}_{\lambda}(\kappa) \frac{\kappa \otimes \kappa}{\kappa^2} \mathbf{D}_{\lambda'}^*(\kappa) e^{i\kappa \cdot \mathbf{R}} \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3},$$

де  $\mathbf{D}_{\lambda}(\kappa)$  – фур'є-образ профілю моди  $\mathbf{m}_{\lambda}(\mathbf{r})$ . Розглянемо далі випадок плоских магнітних точок зі сталою висотою  $h$  – саме такі наноточки виготовляються на сьогодні. Також вважатимемо моди однорідними по товщині наноточки – лише ці моди можна збудити експериментально. За цих умов попередній вираз спрощується:

$$N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R}) = \int N_{\mathbf{k},\lambda\lambda'} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2},$$

у якому двовимірний фур'є-образ  $N_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}$  дорівнює

$$N_{\mathbf{k},\lambda\lambda'} = \sigma_{\lambda}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}} \sigma_{\lambda'}^*(\mathbf{k}), \quad (23)$$

Тут  $\sigma_{\lambda}(\mathbf{k})$  – двовимірний фур'є-образ профілю моди  $\mathbf{m}_{\lambda}(\mathbf{r})$ :

$$\sigma_{\lambda}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{m}_{\lambda}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}, \quad (24)$$

де  $S$  – площа магнітної точки; тензор  $\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}$  має вигляд

$$\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{k^2} f(kh) & \frac{k_x k_y}{k^2} f(kh) & 0 \\ \frac{k_x k_y}{k^2} f(kh) & \frac{k_y^2}{k^2} f(kh) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - f(kh) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

де  $f(kh) = 1 - (1 - \exp[-kh])/(kh)$ .

Фактично, коефіцієнти  $N_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}$  є узагальненням відомого тензора взаємного розмагнічування [6,28] на випадок неоднорідного профілю динамічної намагніченості.

Відзначимо, що у багатьох випадках можна скористатись наближенням середнього поля, тобто

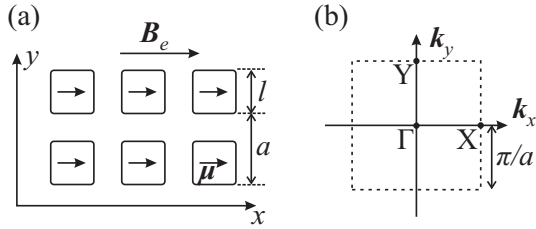


Рис. 2. Геометрія масиву, що розглядається (а), межі першої зони Бріллюена для квадратної ґратки (штрихова лінія) (б)

розраховувати лише усереднений по об'єму наноточки модуль ефективного поля (6):

$$B_j = \langle \mathbf{B}_e \boldsymbol{\mu}_j \rangle - \mu_0 M_s \left[ \langle \boldsymbol{\mu}_j \hat{\mathbf{G}}^{(\text{ex})} * \boldsymbol{\mu}_j \rangle + \sum_l N_s(\mathbf{R}_{jl}) \right],$$

де

$$N_s(\mathbf{R}_{jl}) = \langle \boldsymbol{\mu}_j \hat{\mathbf{G}}_{jl}^{(d)} * \boldsymbol{\mu}_l \rangle_j.$$

Таке наближення справедливе для мод, які не локалізовані в областях сильної зміни внутрішнього поля (наприклад, для крайових мод його застосовувати не можна). Зрозуміло, що коефіцієнти  $N_s(\mathbf{R})$  розраховуються аналогічно до  $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R})$ .

Представлений метод розрахунку особливо ефективний під час розгляду періодичних станів масивів. У цьому випадку система рівнянь для коефіцієнтів  $a_{p,\lambda}$  розвинення динамічної намагніченості надґратки  $\mathbf{m}_p$  теж має вигляд (22), тільки сума по точках  $j$  замінюється на суму по надґратках  $q$ , і замість коефіцієнтів  $N_{\lambda\lambda'}$  з'являються коефіцієнти

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}(\delta_{pq}) &= \sum_{\mathbf{R} \in \mathcal{SL}} N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{R} + \delta_{pq}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{R} + \delta_{pq})} = \\ &= \frac{1}{S_{\mathcal{SL}}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{SL}^*} N_{\mathbf{k}+\mathbf{K},\lambda\lambda'} e^{i\mathbf{K}\delta_{pq}}, \end{aligned} \quad (26)$$

при розрахунку яких ми скористались відомим у фізиці твердого тіла співвідношенням [29] і замінили суму по прямій надґратці  $\mathcal{SL}$  на суму по оберненій  $\mathcal{SL}^*$  ( $S_{\mathcal{SL}}$  – площа елементарної комірки надґратки). За простих геометрій наноточок коефіцієнти  $N_{\mathbf{k}+\mathbf{K},\lambda\lambda'}$  мають прості аналітичні вирази (див. приклад нижче). Також відзначимо, що звичай не потрібно враховувати багато базисних

мод  $\mathbf{m}_\lambda$ , а можна скористатись діагональним наближенням, тобто врахувати лише відповідні базисні функції  $\mathbf{m}_\lambda$  та  $\mathbf{m}_\lambda^*$  для кожної з гілок спектра. Лише у точках перехрещення різних гілок необхідно звертатись до повної системи рівнянь [30].

### 3.2. Приклад застосування методу

Розглянемо приклад застосування методу розрахунку, представленого вище. Розрахуємо спектри СХ у масиві плоских квадратних магнітних точок з висотою  $h$ , поперечними розмірами  $l \times l$ , упорядкованих у квадратну ґратку зі сталою  $a$  (використовується геометрія експерименту з [4], див. рис. 2, а). До масиву прикладене зовнішнє магнітне поле, паралельне осі  $x$ ,  $\mathbf{B}_e = B_e \mathbf{e}_x$ , яке намагнічує наноточки до насиченого стану (при цьому масив знаходиться у ФМ стані).

Скористаємося діагональним наближенням, тобто для кожної гілки спектра врахуємо лише один тип власних мод ізольованої наноточки:

$$\mathbf{m}_\mathbf{k} = a_\lambda \mathbf{m}_\lambda + a_{\lambda'}^* \mathbf{m}_{\lambda'}^*.$$

Тут  $\mathbf{m}_{\lambda'}^* = (\mathbf{m}_\lambda)^*$ , позначення  $\lambda'$  в індексі введене для зручності, щоб розрізнити фізичну і спряжену моди. Виберемо циркулярно поляризований базис  $\mathbf{m}_\lambda = (0, 1, i)f_\lambda$ , де функції профілю  $f_\lambda$  відповідають профілям мод ізольованої наноточки. Для мод Деймона–Ешбаха (DE, моди з вузлами динамічної намагніченості у напрямку, перпендикулярному статичній намагніченості) у наближенні закріплених граничних умов функції  $f_\lambda$  рівні

$$f_{1\text{DE}} = \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}, \quad f_{2\text{DE}} = \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l},$$

і т. д. (початок системи координат збігається з центром наноточки); для зворотних магнітостатичних мод (ВА, вузли у паралельному  $\boldsymbol{\mu}$  напрямі) у виразах вище необхідно змінити  $x \rightarrow y$  і навпаки [31, 32]. Відповідні узагальнені амплітуди форми знаходяться аналітично:

$$\sigma_{1\text{DE}}(\mathbf{k}) = (0, 1, i) \frac{4\pi^2 l^2 \cos(k_x l/2) \cos(k_y l/2)}{(\pi^2 - k_x^2 l^2) (\pi^2 - k_y^2 l^2)},$$

тощо; і аналогічно для ВА мод.

Вибір циркулярно поляризованого базису перетворює на нуль недіагональні коефіцієнти



$\tilde{\omega}_{\lambda\lambda'}$ , враховуючи це, отримуємо рівняння для амплітуд  $a_\lambda$ :

$$a_\lambda (\tilde{\omega}_{\lambda\lambda} A_\lambda + \omega_M G_{\mathbf{k},\lambda\lambda}(\mathbf{0})) + a_{\lambda'} \omega_M G_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}(\mathbf{0}) = \omega_{\mathbf{k}} a_\lambda A_\lambda.$$

Враховуючи те, що  $\tilde{\omega}_{\lambda'\lambda'} = -\tilde{\omega}_{\lambda\lambda}$  та  $A_{\lambda'} = -A_\lambda$ , отримуємо кінцевий вираз для закону дисперсії колективної СХ моди масив у ФМ стані:

$$\omega_{\mathbf{k},\lambda} = \sqrt{\left(\tilde{\omega}_{\lambda\lambda} + \omega_M \frac{G_{\mathbf{k},\lambda\lambda}(\mathbf{0})}{A_\lambda}\right)^2 - \omega_M^2 \frac{|G_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}(\mathbf{0})|^2}{A_\lambda^2}}. \quad (27)$$

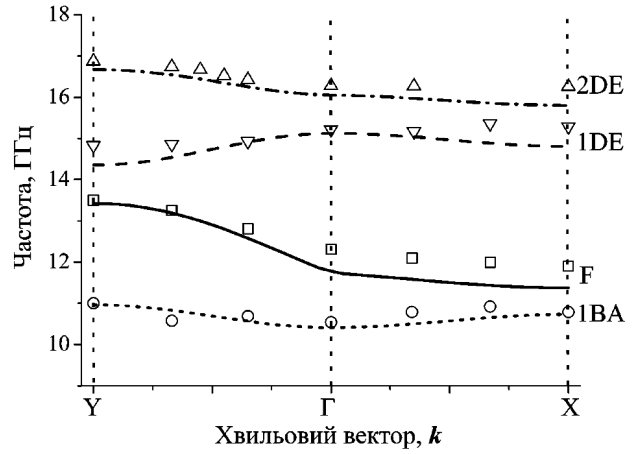
Відзначимо, що у випадку однорідної в об'ємі наноточки моди

$$G_{\mathbf{k},\lambda\lambda}(\mathbf{0})/A_\lambda = (F_{\mathbf{k}}^{(yy)} + F_{\mathbf{k}}^{(zz)})/2,$$

$$G_{\mathbf{k},\lambda\lambda'}(\mathbf{0})/A_\lambda = i(F_{\mathbf{k}}^{(yy)} - F_{\mathbf{k}}^{(zz)})/2$$

(визначення тензора  $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}$  див. у [6]). Безпосередньою підстановкою цих виразів у (27) можна переконатись, що воно еквівалентне рівнянню, отриманому в макроспінівому наближенні ((3.38) у [6]).

Розраховані спектри СХ зображені на рис. 3. Спектр основної (F) моди розрахований у макроспінівому наближенні, оскільки, як відомо з літератури, її профіль у тонких магнітних точках ближчий до однорідного, ніж до гармонічного [5]. Як бачимо, розраховані у діагональному наближенні спектри СХ (без жодних підгоночних параметрів) достатньо гарно збігаються з експериментальними даними (варто врахувати, що експериментальна похибка становить порядку 0,5 ГГц [4]). Видно, що дисперсійні залежності гілок спектра, утворених модами з ненульовим дипольним моментом (F, 2nDE, 2nBA), поведуть себе аналогічно до дисперсії СХ у намагніченій в площині плівці – частота СХ спадає зі зростанням  $|\mathbf{k}|$ , коли хвильовий вектор паралельний до статичної намагніченості (X-напрямок у нашому випадку), і зростає при  $\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\mu}$  (Y-напрямок). Колективні СХ, утворені модами з нульовим дипольним моментом ((2n+1)DE, (2n+1)BA), не змінюють знака групової швидкості при зміні напрямку поширення –  $v_{gr} > 0$  для зворотних магнітостатичних мод і  $v_{gr} < 0$  для DE-мод.



**Рис. 3.** Спектри колективних СХ мод у масиві квадратних наноточок, упорядкованих у квадратну ґратку, в ФМ стані. Лінії – розрахунок, символи – експериментальні дані з [4]. Визначення симетричних точок першої зони Бріллюена: Г, X, Y див. на рис. 2, b. Параметри експерименту: поперечний розмір магнітної точки  $l = 450$  нм, висота  $h = 30$  нм, стала ґратки  $a = 520$  нм, зовнішнє поле  $B_e = 0,15$  Т. Для розрахунку використовувались матеріальні параметри пермалою: намагніченість насичення  $\mu_0 M_s = 1,03$  Т, гіромагнітне відношення  $\gamma = 29,3$  ГГц/Т, квадрат обмінної довжини  $\alpha_{ex}^2 = 28$  нм<sup>2</sup>

Зрозуміло, що дані правила можуть порушуватись внаслідок взаємодії різних гілок спектра, якщо вони знаходяться близько одна до одної.

Таким чином, спектри СХ масивів наноточок у періодичних станах можна достатньо точно і просто розраховувати методом проєкцій на власні моди ізольованої наноточки. Відзначимо, що наявність аналітичних виразів для закону дисперсії СХ дозволяє аналізувати їх загальні властивості, наприклад, поведінку поблизу точки  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , що складно зробити при використанні числових методів розрахунку.

#### 4. Висновки

У даній роботі узагальнено теорію колективних СХ збуджень у масивах магнітних наноточок на випадок неоднорідних в об'ємі наноточки профілів статичної та динамічної намагніченості. Знайдені загальні властивості колективних мод масиву, зокрема, співвідношення ортогональності, та достатні умови стійкості стаціонарного стану масиву. Розглянуто вплив малих збурень на моди масиву,

зокрема, показано залежність сталої затухання СХ від еліптичності прецесії.

Коллективні збудження розглянуті у двох випадках: у скінченних масивах та нескінченних періодичних. З математичної точки зору обидва випадки ідентичні, тому властивості мод скінченних масивів та хвиль у періодичних масивах однакові. В обох випадках задача знаходження частот та структури колективних збуджень зводиться до скінченно-вимірної інтегрально-диференціальної задачі на власні значення. Запропоновано ефективний спосіб наближеного розрахунку спектрів СХ методом проєкцій шляхом узагальнення тензора взаємного розмагнічування наноточок. Зокрема, у випадку періодичних масивів можливо отримати аналітичні вирази для законів дисперсії СХ.

Розглянуті СХ у феромагнітному стані масиву намагнічених до насичення наноточок, упорядкованих у квадратну ґратку. Продемонстровано прийнятне збігання розрахунку з експериментальними даними. Показано, що поведінка закону дисперсії СХ принципово залежить від наявності середнього дипольного моменту моди у наноточці: моди з ненульовим дипольним моментом поводять себе аналогічно до СХ у тангенціально намагніченій плівці феромагнетика, в той час як інші моди не змінюють знак групової швидкості при зміні напрямку поширення з паралельного до статичної намагніченості на перпендикулярний.

*Робота підтримана Міністерством освіти та науки України (грант № М/90-2010) та Державним фондом фундаментальних досліджень України (грант № УУ34/008).*

1. *Advanced Magnetic Nanostructures*, ed. by D.J. Sellmyer and R. Skomski (Springer, New York, 2006).
2. J. Stohr, H.C. Siegmann, *Magnetism. From fundamentals to nanoscale dynamics* (Springer, Berlin, 2006).
3. M. Francardi, M. Sepioni, A. Gerardino, F. Sansone, G. Gubbiotti, M. Madami, S. Tacchi, and G. Carlotti, *Microwave Engineering* **87**, 1614 (2010).
4. S. Tacchi, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, H. Tanigawa, T. Ono, and M.P. Kostylev, *Phys. Rev. B* **82**, 024401 (2010).
5. S. Tacchi, F. Montoncello, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, L. Giovannini, R. Zivieri, F. Nizzoli, S. Jain, A.O. Adeyeye, and N. Singh, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 127204 (2011).

6. R. Verba, G. Melkov, V. Tiberkevich, and A. Slavin, *Phys. Rev. B* **85**, 114427 (2012).
7. Р. Верба, Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Радіофізика та електроніка **17**, 29 (2012).
8. A.V. Chumak, A.A. Serga, B. Hillebrands, and M.P. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 022508 (2008).
9. A.V. Chumak, A.A. Serga, S. Wolff, B. Hillebrands, and M.P. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 172511 (2009).
10. R. Verba, G. Melkov, V. Tiberkevich, and A. Slavin, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 192412 (2012).
11. J. Topp, D. Heitmann, M.P. Kostylev, and D. Grundler, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 207205 (2010).
12. S. Tacchi, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, S. Goolaup, A.O. Adeyeye, N. Singh, and M.P. Kostylev, *Phys. Rev. B* **82**, 184408 (2010).
13. K.Y. Guslienko, R.W. Chantrell, and A.N. Slavin, *Phys. Rev. B* **68** 024422 (2003).
14. K.Yu. Guslienko, *J. Nanosci. Nanotech.* **8**, 2745 (2008).
15. M. Dvornik, P.V. Bondarenko, B.A. Ivanov, and V.V. Kruglyak, *J. Appl. Phys.* **109**, 07B912 (2011).
16. R. Zivieri, F. Montoncello, L. Giovannini, F. Nizzoli, S. Tacchi, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, and A.O. Adeyeye, *Phys. Rev. B* **83**, 054431 (2011).
17. R. Zivieri, S. Tacchi, F. Montoncello, L. Giovannini, F. Nizzoli, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, S. Neusser, G. Duerr, and D. Grundler, *Phys. Rev. B* **85**, 012403 (2012).
18. G. Gubbiotti, S. Tacchi, G. Carlotti, N. Singh, S. Goolaup, A.O. Adeyeye, and M. Kostylev, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 092503 (2007).
19. G. Gubbiotti, S. Tacchi, M. Madami, G. Carlotti, A.O. Adeyeye, and M. Kostylev, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **43**, 264003 (2010).
20. R. Arias and D.L. Mills, *Phys. Rev. B* **70**, 104425 (2004).
21. P. Chu, D.L. Mills, and R. Arias, *Phys. Rev. B* **73**, 094405 (2006).
22. A.Yu. Galkin, B.A. Ivanov, and C.E. Zaspel, *Phys. Rev. B* **74**, 144419 (2006).
23. А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков, *Магнитные колебания и волны* (Наука, Москва, 1994).
24. K.Yu. Guslienko, and A.N. Slavin, *J. Magn. Magn. Matter* **323**, 2418 (2011).
25. K.Yu. Guslienko, *Appl. Phys. Lett.* **75**, 394 (1999).
26. J.E.L. Bishop, A.Yu. Galkin, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **65**, 174403 (2002).
27. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика в 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (Наука, Москва, 1989).
28. M. Beleggia and M. De Graef, *J. Magn. Magn. Mater.* **278**, 270 (2004).
29. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твёрдого тела* (Мир, Москва, 1979), Т. 1.
30. B.A. Kalinikos and A.N. Slavin, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **19**, 7013 (1986).
31. C. Bayer, J. Jorzick, B. Hillebrands, S.O. Demokritov, R. Kouba, R. Bozinoski, A.N. Slavin, K.Y. Guslienko,

D.V. Berkov, N.L. Gorn, and M.P. Kostylev, Phys. Rev. B **72**, 064427 (2005).

32. M. Bailleul, R. Hollinger, and C. Fermon, Phys. Rev. B **73**, 104424 (2006).

Одержано 09.10.12

*P.V. Verba*

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В МАССИВАХ  
МАГНИТНЫХ НАНОТОЧЕК, СВЯЗАННЫХ  
МАГНИТОДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Резюме

Представлена общая теория коллективных спин-волновых возбуждений в конечных и бесконечных периодических массивах магнитных наноточек, связанных магнитодипольным взаимодействием. Теория учитывает неоднородность статической и динамической намагниченности в объёме наноточки и позволяет рассчитывать спектры коллективных возбуждений, их постоянные затухания, эффективность возбуждения внешним полем, и т. п., и исследовать устойчивость стационарного состояния массива. Предложен эффективный способ расчёта свойств спиновых волн в периоди-

ческих массивах методом проекций на собственные моды изолированной наноточки; полученные результаты сравнены с экспериментальными данными.

*R.V. Verba*

SPIN WAVES IN ARRAYS OF MAGNETIC NANODOTS  
WITH MAGNETODIPOLAR COUPLING

S u m m a r y

A general theory of collective spin-wave excitations in finite and infinite periodic arrays of magnetic nanodots with magnetodipolar coupling has been developed. Non-uniform profiles of static and dynamic magnetizations in a dot are taken into account. The theory allows the spectra of collective excitations, their damping rates, excitation efficiencies by an external microwave field, and so on to be calculated and the stability of a stationary magnetic array configuration to be analyzed. An efficient technique has been proposed to calculate the spin-wave spectra in periodic arrays using the method of projection onto the eigenmodes of a solitary nanodot. The results obtained are compared with experimental data.