П. КОСОБУЦЬКИЙ

Національний університет "Львівська політехніка"

(Вул. С. Бандери, 12, Львів 79013; e-mail: petkosob@gmail.com)

УДК 53.088.3

АНАЛІТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ОБЧИСЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ І СЕРЕДНЬОЇ КВАДРАТИЧНОЇ ПОХИБКИ СТАНДАРТНО $N(0, \sigma_X)$ РОЗПОДІЛЕНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, ПІДДАНОЇ ПЕРЕТВОРЕННЮ $\sqrt{X}$

Обчислено математичне сподівання і дисперсія фізичних величин із випадковими значеннями, підпорядкованих стандартному $N(0, \sigma_X)$ розподілу та перетворені функціонально пов'язаними залежностями прямим квадратичним X^2 та оберненим вигляду $\sqrt{X}$.

Ключові слова: нормальний розподіл, математичне сподівання, дисперсія, випадкові величини, пряме квадратичне і обернене йому перетворення випадкових величин, похибки.

1. Вступ

Лінійні і нелінійні перетворення фізичних величин, покладені в основу моделювання принципів роботи приладів. Широко використовуються пряме квадратичне

$$Y = \alpha X^2 \tag{1}$$

і обернене до нього

$$Y = \beta\sqrt{X} \tag{2}$$

перетворення для побудови моделей пружно-деформованого стану тіла методом потенціальної енергії $W_P = \frac{1}{2}\alpha x^2$, рухомого тіла методом кінетичної енергії $W_K = \frac{1}{2}m\vartheta^2$, електронагрівних приладів методом джоулевого тепловиділення $\mathrm{P} = RI^2$, тощо. Отже, якщо в них вхідні параметри зазнають випадкових флуктуацій, то шляхом дослідження закономірностей у більшості випадків шляхом нелінійно перетвореної величини можна побудувати статистичну модель фізичної закономірності. Аналогічні задачи актуальні в оптиці, в квантовій механіці для моделювання хвильових процесів шляхом тригонометричного перетворення фазових співвідношень.

Однак, незважаючи на те, що статистично-ймовірнісні методи опрацювання результатів вимірювань чи обчислень розроблені досить добре, завжди актуальним для практики залишається пошук аналітичних співвідношень, які б давали можливість спростити алгоритм аналітичної оцінки ймовірнісно-статистичних параметрів досліджуваних моделей. Для нормально розподілених систем базовими є математичне сподівання $E_{X,Y}$ і середньоквадратичне відхилення (СКВ) $\sigma_{X,Y} = \sqrt{D_{X,Y}}$, хоч для більш повного аналізу закону розподілу ймовірностей $F(x)$ треба моделювати закономірності коефіцієнтів асиметрії, скошеності, тощо кривих диференціальної функції $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

У процесі опрацювання результатів фізичного експерименту, одержані значення виміряної фізичної величини (вибірка випадкової величини (ВВ)), переважно піддають арифметичним, тригонометричним, логарифмічним, тощо перетворенням. Однак, нелінійні перетворення ВВ типу прямих $Y = g(X) = X^2$, $\cos X^2$ та обернені ним $Z = g^{-1}(X) = \sqrt{X}$, $\arccos X$, та інші, на відміну від лінійних типу $aX + b$, змінюють щільність розподілу $f(x)$, що суттєво може ускладнити алгоритм обчислення похибок і змушує вводити інші параметри розподілу. Для нормально $N(m_X, \sigma_X)$ розподіленої ВВ, одну із таких задач сформулював автор [1, 2], запропонувавши для прямих $Y = g(X) = X^2$, $\cos X^2$ і обернених ним $Z = g^{-1}(X) = \sqrt{X}$, $\arccos X$ перетворень елементів вибірки так звані правила "переносу похибок" методом формального зниження індексів в розв'язках відповідних квадратних рівнянь, однак без належного на те ймовірнісно статистичного обґрунтування. В даній роботі, на основі базових положень теорії ймовірностей та математичної статистики [3, 4], обґрунтовані аналітичні формули обчислення базових $E_{X,Y}, \sigma_{X,Y}$ параметрів розподілу ймовірностей для оберненого $Z = g^{-1}(X) = \sqrt{X}$ до квадратичного $Y = g(X) = X^2$ перетворення стандартно $N(0, \sigma_X)$ розподіленої ВВ X.

2. Теоретичний аналіз статистичного усереднення та обговорення одержаних результатів

Незважаючи на те, що статистична модель квадратичного перетворення обговорювалась в літературі неодноразово (див., наприклад, [3, 4]), у більшості випадків аналіз завершувався встановленням функції розподілу щільності ймовірностей перетворюваної ВВ. Тому, для коректного застосування оберненого до квадратичного перетворення, встановимо функцію $f_W(w)$ розподілу щільності ймовірностей випадкової величини W.

Нехай ВВ X піддається двосторонньому $(-\infty < x < +\infty)$ квадратичному перетворенню (1). Наше завдання обґрунтувати дисперсію $D_Y = D_{\sqrt{X}}$ і середнє $\bar{Y} = \sqrt{\bar{X}}$ оберненого перетворення (2). Для цього застосуємо до ВВ X двостадійне послідовно одне за одним перетворення типу:

$$X \xrightarrow{Y=\sqrt{X}} \text{ВВ}\,\sqrt{X} \xrightarrow{W=\alpha Y^4} \text{ВВ}\,W. \tag{3}$$

В (3), на першій стадії, функція перетворення має вигляд

$$y = \beta\sqrt{x}, \tag{4}$$

а на другій

$$w = \alpha y^4. \tag{5}$$

Перетворення за алгоритмом (3) завершується квадратичним перетворенням (1) ВВ X. Тому проаналізуємо закономірності квадратичного перетворення.

В необмеженому інтервалі значень $x \in \in (-\infty, +\infty)$, функція

$$w = g(x) = \alpha x^2 \tag{6}$$

квадратичного перетворення (1) двозначна і має два корені:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{w}{\alpha}}, \quad x < 0, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{w}{\alpha}}, \quad x \geq 0, \tag{7}$$

тому інтервал $(-\infty, +\infty)$ зручно розділити на два $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$, в яких функція (6) монотонна.

Значення w ніколи не приймають від'ємних і для $w \geq 0$ множиною $g(w)$ є множина точок $(X_1 \leq x \leq \leq X_2)$. В областях монотонності, функція $w = \alpha x^2$ в інтервалі $(-\infty, 0)$ має обернену функцію

$$g_1(w) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{w} \tag{8}$$

та першу похідну

$$\frac{d}{dw}g_1(w) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}, \tag{9}$$

а в інтервалі $(0, +\infty)$

$$g_2(w) = +\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{w} \tag{10}$$

та першу похідну

$$\frac{d}{dw}g_2(w) = +\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}. \tag{11}$$

Тоді згідно з формулою перетворення [3]:

$$f_W(w) = f_X\left[g^{-1}(w)\right]\left|\frac{d}{dw}g^{-1}(w)\right| = = \frac{f_X\left[g^{-1}(w)\right]}{\left|\frac{dw}{dx}\Big|_{x=g^{-1}(w)}\right|}, \tag{12}$$

функція щільності ймовірностей перетвореної за законом (6) $f_W(w)$ має вигляд:

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}f_X\left(+\sqrt{\frac{w}{\alpha}}\right) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}f_X\left(-\sqrt{\frac{w}{\alpha}}\right). \tag{13}$$

Для ВВ X із функцією стандартного розподілу:

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp\left(-px^2\right), \quad p = \frac{1}{2\sigma_X^2}, \tag{14}$$

перетвореної за законом (6), функція $f_W(w)$(13) матиме вигляд:

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{w}}e^{-p\frac{w}{\alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}\sqrt{\frac{p}{\pi}}e^{-p\frac{w}{\alpha}} = \\ = \sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\frac{1}{\sqrt{w}}\exp\left(-\frac{p}{\alpha}w\right). \tag{15}$$

Як випливає із (15), квадратичне перетворення змінює закон розподілу ВВ X.

Незважаючи на те, що при $w \to 0$, функція $f_W(w) \to \infty$, умова її нормування виконується:

$$C_w\sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\int\limits_0^\infty w^{-1/2}\exp\left(-\frac{p}{\alpha}w\right)dw = \\ = C_w\sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\sqrt{\frac{\pi\alpha}{p}} = 1 \Rightarrow C_w = 1, \tag{16}$$

де використаний табличний інтеграл (860.05) [7]. Лише за виконання умови нормування (16), рівняння дисперсії D_W набуває вигляду

$$D_W = \int\limits_0^\infty \left(w - \bar{W}\right)^2 f(w)dw = \\ = \int\limits_0^\infty \left(w^2 + \bar{W}^2 - 2w\bar{W}\right) f(w)dw = \\ = \int\limits_0^\infty w^2 f(w)dw + \bar{W}^2\int\limits_0^\infty f(w)dw - 2\bar{W}\int\limits_0^\infty wf(w)dw = \\ = \bar{W^2} + \bar{W}^2 - 2\bar{W}^2 = \bar{W^2} - \bar{W}^2, \tag{17}$$

характерного для статистично незалежних ВВ [1]. В (17), межі інтегрування узгоджені із множиною невід'ємних значень перетвореної за законом (1) ВВ $w \geq 0$.

Тепер сформулюємо систему рівнянь для дисперсій вихідної і перетвореної за квадратичним алгоритмом $X \xrightarrow{W=\alpha X^2}$ ВВ αX^2 перетвореної ВВ:

$$D_X = \bar{X^2} - \bar{X}^2, \tag{18a}$$

$$D_W = \bar{W^2} - \bar{W}^2, \tag{18b}$$

або

$$D_X = \bar{X^2} - \bar{X}^2, \tag{18c}$$

$$D_W = \bar{W^2} - \alpha^2\left(\bar{X^2}\right)^2, \tag{18d}$$

для чого обчислимо середні $\bar{W}$і $\bar{W^2}$. Середнє $\bar{W}$ дорівнює:

$$\bar{W} = C_W\sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\int\limits_0^{+\infty} w^{1/2}\exp\left(-\frac{p}{\alpha}w\right)dw = \\ = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\sqrt{\frac{\pi\alpha}{p}} = \alpha\sigma_X^2, \tag{19}$$

де використані табличні інтеграли (860.04) [7]. Для гармонічного осцилятора, $W = \frac{1}{2}\alpha x^2$, тому $\bar{W} = \frac{1}{2}\alpha\sigma_X^2$. Середнє квадрата $\bar{W^2}$ дорівнює:

$$\bar{W^2} = C_W\sqrt{\frac{p}{\pi\alpha}}\int\limits_0^{+\infty} w^{3/2}\exp\left(-\frac{p}{\alpha}w\right)dw = \\ = \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{(p/\alpha)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{(p/\alpha)^{5/2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 = 3\alpha^2\sigma_X^4, \tag{20}$$

де використано табличні інтеграли (860.06) [7]. Для гармонічного осцилятора $\bar{W^2} = \frac{3}{4}\alpha^2\sigma_X^2$, а СКВ енергії $\sqrt{\bar{W^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\sigma_X^2$.

Рівняння дисперсії для перетворення (6), матиме вигляд:

$$D_W = 3\alpha^2\sigma_X^4 - \left(\alpha\sigma_X^2\right)^2 = 2\alpha^2\sigma_X^4 > 0 \tag{21}$$

і задовольняє вимозі невід'ємності дисперсії, тому СКВ σ_W дорівнює:

$$\sigma_W = \sqrt{2}\alpha\sigma_X^2. \tag{22}$$

Порівняємо одержані результати із відомими в літературі. Для нормально $N(m_X, \sigma_X^2)$ розподіленої ВВ X, квадратичне перетворення $Y = X^2$ дає значення для дисперсії $D_{X^2} = 2D_X^2 + 4E_X^2 D_X$ [1]. Якщо вихідна ВВ X розподілена стандартно $N(0, \sigma_X^2)$, то $D_{X^2} = 2\sigma_X^4$, що узгоджується з (21).

[1] Для незалежних ВВ W коваріація дорівнює нулю [3–5]. Коефіцієнт кореляції двох ВВ може дорівнювати нулю, навіть якщо ВВ не є незалежні. Навпаки, якщо коефіцієнт кореляції відмінний від нуля, то дві ВВ не можуть бути незалежними [6].

Тепер змоделюємо квадратичне перетворення ВВ $W \to \alpha X^2$ шляхом із двох послідовних стадій (3). На першій стадії застосуємо дробове перетворення $Y = \sqrt{X}$, а на другій – $W = \alpha Y^4$.

Рівняння $y = \beta\sqrt{x}$ в інтервалі $y < 0$, розв'язків не має і в ньому комулятивна функція розподілу $F(y) = 0$. В інтервалі $y \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{y}{\beta}$ для $-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \leq$ $\leq x \leq +\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$ і рівняння $y = \beta\sqrt{x}$ має один корінь $x = +\frac{y^2}{\beta^2}$ при $x \geq 0$ [5], де значення y ніколи не набуває від'ємних. Функція $y = \beta\sqrt{x}$ має обернену

$$g^{-1}(x) = \frac{y^2}{\beta^2}, \tag{23}$$

та першу похідну

$$\frac{dg^{-1}(x)}{dy} = \frac{2y}{\beta^2}, \tag{24}$$

тому функція розподілу перетвореної ВВ $f_Y(y)$ дорівнює:

$$f_Y(y) = \frac{2y}{\beta^2} f_X\left(\frac{y^2}{\beta^2}\right). \tag{25}$$

Оскільки вихідна ВВ X розподілена за законом $N(0, \sigma_X)$, функція (25) матиме вигляд:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\, y \exp\left(-\frac{p}{\beta^4}y^4\right). \tag{26}$$

Графік функції (26) бере початок із точки (0,0), досягаючи максимуму в точці з найбільш ймовірною координатою

$$y_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma_X^2}{2}},$$

або в системі координат вихідної ВВ X:

$$x_{\max} = (y_{\max})^2 = \sqrt[2]{\frac{\sigma_X^2}{2}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}}.$$

Обґрунтуємо умову нормування та визначимо сталу нормування C_Y для функції (26):

$$C_Y \frac{2}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{p}{\beta^4}y^4\right) dy =$$
$$= C_Y \frac{2}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{1}{4}\left(\frac{p}{\beta^4}\right)^{-2/4}\Gamma\left(\frac{2}{4}\right) =$$
$$= C_Y \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_Y = 2. \tag{27}$$

де використаний табличний інтеграл (3.478(1)) [8]. Тоді рівняння дисперсії типу (17) для статистично незалежних ВВ перетворених за законом (4), матиме вигляд:

$$D_{\sqrt{X}} = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{x} - \overline{\sqrt{X}}\right)^2 f(y)dy =$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \overline{\sqrt{X}}^2 - 2\sqrt{x}\,\overline{\sqrt{X}}\right) f(y)dy =$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\sqrt{x}\right)^2 f(y)dy + \overline{\sqrt{X}}^2 \int_0^{\infty} f(y)dy - 2\overline{\sqrt{X}} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \sqrt{x} f(y)dy = \overline{\left(\sqrt{X}\right)^2} + \overline{\sqrt{X}}^2 \int_0^{\infty} f(y)dy - 2\overline{\sqrt{X}}^2 =$$
$$= \overline{\left(\sqrt{X}\right)^2} - \overline{\sqrt{X}}^2, \tag{28}$$

де згідно з (27), середні $\overline{\sqrt{x}}$ і $\overline{(\sqrt{x})^2}$ обчислюються за формулами:

$$\overline{\sqrt{X}} = \frac{4}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_0^{+\infty} y^2 \exp\left(-\frac{p}{\beta^4}y^4\right) dy =$$
$$= \frac{4}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{1}{4} \frac{\beta^3}{\sqrt{p}\sqrt[4]{p}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \beta\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\sigma_X}, \tag{29}$$

$$\overline{\left(\sqrt{X}\right)^2} = \frac{4}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_0^{+\infty} y^3 \exp\left(-\frac{p}{\beta^4}y^4\right) dy =$$
$$= \frac{4}{\beta^2}\sqrt{\frac{p}{\pi}} \frac{1}{4} \frac{\beta^4}{p} \Gamma\left(\frac{4}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\beta^2\sigma_X \neq 0. \tag{30}$$

Перевіримо умову невід'ємності дисперсії:

$$D_{\sqrt{X}} = \frac{\beta^2\sigma_X}{\sqrt{2\pi}} - \beta^2\sigma_X \left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 =$$
$$= \beta^2\sigma_X \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}}\right)^2\right) > 0. \tag{31}$$

Для стандартно $N(0, \sigma_X^2)$ розподіленої вихідної ВВ X, підданої перетворенню $Y = \beta\sqrt{X}$, формули (29)–(31) якраз і визначають ті аналітичні співвідношення, які намагався віднайти автор [1]. Однак, порівняти їх не є можливим, оскільки відповідні співвідношення в [1], не можна застосовувати для стандартно розподіленої вихідної ВВ X. Для нормально $N(m_X, \sigma_X^2)$ розподіленої вихідної ВВ X, математичне сподівання $m_X \neq 0$, тому відповідне статистичне усереднення ускладнюється внаслідок появи в підінтегральних виразах добутку трьох функцій із випадковими змінними, що вимагає додаткового теоретичного дослідження.

Завершимо другий етап двостадійного (3) перетворення ВВ X та встановимо закономірності функції розподілу щільності ймовірностей $f_U(u)$ перетвореної ВВ $Y = \beta\sqrt{X}$ за законом $U = \gamma Y^4$. Для простоти покладемо $\beta = 1$. Тоді функція $u = g(y) = \gamma y^4$ має обернені типу

$$y = \pm\left(\frac{u}{\gamma}\right)^{1/4}, \tag{32}$$

і похідні

$$\left|\frac{d}{du}\left(\frac{u}{\gamma}\right)^{1/4}\right| = \left|\frac{1}{4}\gamma^{-1/4}u^{-3/4}\right|. \tag{33}$$

Випадкова величина Xспершу перетворена за законом $Y = \sqrt{X}$, тому область визначення $y \geq 0$. Це означає, що функція $w = \alpha y^4 = \gamma y^4$ і функція $f_U(u)$ щільності ймовірності матиме вигляд:

$$f_U(u) = 2\sqrt{\frac{p}{\pi}}\ \left(\frac{u}{\gamma}\right)^{1/4}\frac{1}{4}\gamma^{-1/4}u^{-3/4}\exp\left(-\frac{p}{\gamma}u\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sigma_X\sqrt{w}}\exp\left(-\frac{w}{2\alpha\sigma_X^2}\right) = f_W(w). \tag{34}$$

Одержаний результат збігається із (15), що підтверджує правильність проведених вище перетворень та обчислень. Підведемо підсумок роботи. Якщо стандартно $N(0, \sigma_X)$ розподілена випадкова величина X піддається нелінійному перетворенню типу радикала $Y = \sqrt{X}$, математичне сподівання перетвореної величини дорівнює

$$\overline{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X} \cong 0{,}691\ \times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\sigma_X} \cong 0{,}822\sqrt{\sigma_X},$$

а середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_{\sqrt{X}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cong$$

$$\cong 0{,}391\sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X} \cong 0{,}312\sqrt{\sigma_X}.$$

3. Висновок

Вперше обґрунтовано аналітичні співвідношення оцінок математичного сподівання, дисперсії і середньоквадратичної похибки стандартно $N(0, \sigma_X)$ розподіленої вихідної випадкової величини X, підданої оберненому $Y = \sqrt{X}$ до квадратичного $Z = X^2$ перетворенню. Математичне сподівання дорівнює $\overline{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X} \cong 0{,}691\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\sigma_X} \cong 0{,}822\sqrt{\sigma_X}$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\sqrt{X}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cong 0{,}391\sqrt{\frac{2}{\pi}\sigma_X} \cong 0{,}312\sqrt{\sigma_X}$.

1. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos X$ та $\arccos X$. *УФЖ* **61**, 355 (2016).
2. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій x^2 та $\sqrt{x}$. *УФЖ* **62**, 184 (2017).
3. А. Хальд. *Математическая статистика с техническими приложениями* (ИЛ, 1956).
4. J.K. Patel, C.B. Read. *Handbook of the Normal Distribution* (Marcel Dekker, 1982).
5. A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, 1991).
6. Луї де Бройль. *Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики* (Мир, 1986).
7. Г. Двайт. *Таблицы интегралов и другие математические формулы* (Наука, 1978).
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматгиз, 1963).

Одержано 29.09.17

P. Kosobutsky

ANALYTICAL RELATIONS
FOR THE MATHEMATICAL EXPECTATION
AND VARIANCE OF A STANDARD DISTRIBUTED
RANDOM VARIABLE SUBJECTED
TO THE $\sqrt{X}$ TRANSFORMATION

S u m m a r y

The mathematical expectation and the variance have been calculated for random physical variables with the standard distribution function that are transformed by functionally related direct quadratic, X^2, and inverse quadratic, $\sqrt{X}$, dependences.