

А.В. ГРАДИСЬКИЙ,¹ Ю.П. СТЕПАНОВСЬКИЙ²

¹ Харківський Національний Університет ім. Каразіна
(Майдан Свободи, 4, Харків 61022; e-mail: artem.gradysky@gmail.com)

² Національний науковий центр “ХФТГ” НАНУ
(Вул. Академічна, 1, Харків 61108; e-mail: yustep@kipt.kharkov.ua)

БЕЗМАСОВА ГРАНИЦЯ РІВНЯНЬ БАРГМАНА–ВІГНЕРА ДЛЯ МАСИВНОГО ГРАВІТОНА

УДК 539.1.01

Дані про відкриття гравітаційних хвиль привернули увагу до питання існування маси у гравітонів, тобто до питання масивного гравітона. Масивний гравітон – це частинка зі спіном 2 та ненульовою масою. Метою роботи є дослідження границі релятивістських хвильових рівнянь масивного гравітона для випадку нульової маси частинки. Рівняння для гравітона ненульової маси базуються на рівняннях Баргмана–Вігнера у п’ятивимірному просторі-часі із сигнатурою (+ + + + –). Безмасова границя масивного гравітона зберігає усі можливі стани поляризації. Ці стани відповідають LL-гравітону (спіральність 0), TL-гравітону (спіральність ±1) та TT-гравітону (спіральність ±2).

Ключові слова: рівняння Баргмана–Вігнера, масивний гравітон, хвильові рівняння.

1. Вступ

Спостереження гравітаційних хвиль в період 2015–2017 рр. привернуло увагу до старого питання, чи є у гравітонів маса, тобто до проблеми масивного гравітона [1, 2]. Масивний гравітон – гіпотетична частинка зі спіном 2, маса m якої оцінюється як менша за 10^{-22} – 10^{-32} еВ. Мета даного дослідження – розглянути масивний гравітон як безмасовий у п’ятивимірному просторі-часі та показати, що усі п’ять станів його поляризації зберігаються у безмасовій границі у просторі-часі Мінковського, на відміну від загальноприйнятої точки зору [3].

2. Хвильові рівняння Ландау–Пайерлса для світлових квантів та рівняння Бронштейна для гравітаційних квантів

У 1930 р. Л. Ландау та Р. Пайерлс першими розглянули питання про хвильову функцію світлового кванта. На початку роботи [4] Ландау та Пайерлс слушно припустили, що світловий квант треба описувати рівняннями Максвелла у вакуумі (будемо вважати, що $c = \hbar = 1$):

$$\dot{\mathfrak{E}} = \text{rot}\mathfrak{H}, \quad \text{div}\mathfrak{E} = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\mathfrak{H}} = -\text{rot}\mathfrak{E}, \quad \text{div}\mathfrak{H} = 0. \quad (2)$$

За Ландау і Пайерлсом в рівняннях (1), (2) вектори \mathfrak{E} та \mathfrak{H} є комплексними величинами.

© А.В. ГРАДИСЬКИЙ, Ю.П. СТЕПАНОВСЬКИЙ, 2018

582

Ландау і Пайерлс наклали на \mathfrak{E} та \mathfrak{H} додаткові обмеження, які відтинали розв’язки рівнянь (1), (2) з від’ємними енергіями. Позначивши “хвильову функцію” фотона, як $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{E}$ (або $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{H}$), Ландау і Пайерлс написали для “хвильової функції” \mathfrak{F} такі “хвильові рівняння”:

$$\dot{\mathfrak{F}} = -\sqrt{\Delta}\mathfrak{F}, \quad (3)$$

$$\text{div}\mathfrak{F} = 0. \quad (4)$$

де $\sqrt{\Delta}$ – інтегро-диференційний оператор,

$$\sqrt{\Delta}\mathfrak{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^2 i} \Delta \int \frac{\mathfrak{E}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d^3y. \quad (5)$$

Якщо шукати розв’язок рівнянь (3), (4) у вигляді плоскої хвилі

$$\mathfrak{F} = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{f}, \quad (6)$$

то з них випливають такі вирази:

$$\omega = |\mathbf{k}|, \quad (7)$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{f}) = 0, \quad (8)$$

Рівняння (7) відрізняється від наслідків рівнянь Максвелла (1), (2):

$$\omega = \pm|\mathbf{k}|. \quad (9)$$

Згодом стало зрозуміло, що саме рівняння Максвелла (1), (2) з комплексними \mathfrak{E} та \mathfrak{H} і є хвильовими рівняннями для світлових квантів (фотонів).

Щоб прояснити фізичний квантово-механічний зміст рівнянь Максвелла, як хвильових рівнянь для фотонів, доцільно замість шести комплексних величин \mathfrak{E} та \mathfrak{H} ввести шість комплексних величин (векторів Рімана–Зільберштейна [5–7] ψ_+ та ψ_-):

$$\psi_{\pm} = \mathfrak{E} \pm i\mathfrak{H}. \quad (10)$$

Тепер рівняння Максвелла (1), (2) набувають вигляду

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm} = \pm \mathbf{rot} \psi_{\pm}, \quad (11)$$

$$\mathbf{div} \psi_{\pm} = 0. \quad (12)$$

Відзначимо переваги переходу від векторів \mathfrak{E} та \mathfrak{H} до векторів ψ_+ та ψ_- :

1. Рівняння Максвелла перетворились у дві незалежні пари рівнянь для двох функцій ψ_+ та ψ_- .

2. Функції ψ_+ та ψ_- при перетвореннях власної групи Лоренца перетворюються досить просто і незалежно одна від другої. Так, при переході у систему відліку, що рухається відносно іншої зі швидкістю \mathbf{v} , нові функції мають вигляд

$$\psi'_{\pm} = \frac{\psi_{\pm} \pm i[\mathbf{v}, \psi_{\pm}]}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (13)$$

3. Рівняння (11) має вигляд рівняння Шредингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (14)$$

з гамільтоніаном $H = \pm \mathbf{rot}$.

4. Фізичний зміст гамільтоніана $H = \pm \mathbf{rot}$ такий: $H = \pm(\mathbf{sp})$, де \mathbf{s} – оператор спіна фотона $(s_i)_{kl} = -i\varepsilon_{ikl}$; \mathbf{p} – оператор імпульсу фотона, $p_i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}$; ε_{ikl} – повністю антисиметричний одиничний символ Леві–Чивіта, $\varepsilon_{123} = 1$.

Таким чином, якщо фотони мають певні енергії та імпульси, то рівняння (11) описують фотони з правою (R , або $+$) та лівою (L , або $-$) спіральностями.

Як було з'ясовано у роботі [8], рівняння Вейля [9] для безмасового нейтрино ($s = \frac{1}{2}$), хвильові рівняння Максвелла для фотона ($s = 1$), та хвильові рівняння Бронштейна [10] для гравітона ($s = 2$) мають однакову теоретико-групову природу і відповідні гамільтоніани $H = \pm \frac{1}{s}(\mathbf{sp})$. (Докладніше про це див. [11–15]).

У роботі М.П. Бронштейна [10] рівняння для слабких гравітаційних хвиль були представлені у формі, у якій спорідненість з рівняннями Максвелла була очевидною. Так, рівняння Максвелла (1), (2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_i &= \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_l, & \frac{\partial}{\partial x_i} E_i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} H_i &= -\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} E_l, & \frac{\partial}{\partial x_i} H_i &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рівняння Айнштайна для слабких гравітаційних хвиль у формі Бронштейна мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_{ij} &= \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{lj}, & \frac{\partial}{\partial x_i} E_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} H_{ij} &= -\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} E_{lj}, & \frac{\partial}{\partial x_i} H_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

де E_{ij} та H_{ij} – симетричні безслідні тензори¹,

$$\begin{aligned} E_{ij} &= R_{4j4i} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} R_{klmn}, \\ H_{ij} &= \frac{i}{2} \varepsilon_{imn} R_{4jmn} = \frac{i}{2} \varepsilon_{imn} R_{mn4j}, \end{aligned} \quad (17)$$

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ – айнштайнівський тензор кривизни.

У роботі [10] Бронштейн не вводив термінів “гравітон” та “хвильова функція гравітаційного кванта”. Він розглядав комплексні тензори E_{ij} та H_{ij} , як розв’язки рівнянь (16). Що є нічим іншим, як хвильовими функціями гравітонів, а рівняння (16) відповідними хвильовими рівняннями.

3. Хвильові рівняння для фотонів та гравітонів у спірній формі

У 1929 р. на прохання П. Еренфеста Б.Л. ван дер Варден розвинув спірний аналіз [16]. Першими у спірній формі розглянули рівняння Максвелла Лапорт та Уленбек у 1931 р. [17]. Вони згадали про вектор Рімана–Зільберштейна і використали його у своїй роботі (у Рімана та Зільберштейна був тільки один вектор $\mathfrak{H} - i\mathfrak{E}$). Скориставшись векторами

¹ Для перевірки симетричності правої частини рівнянь (16) відносно індексів i та j зробимо таке: розглянемо різницю $\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{lj} - \varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{li}$. Користуючись властивістю (17) та $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{mnl} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$ можна показати, що ця різниця дорівнює нулю. А отже тензор є симетричним відносно перестановки i та j . Симетричність іншого тензора доводиться аналогічно.

Рімана–Зільберштейна (10), ми можемо записати рівняння (11) та (12) у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \psi_{(\pm)} = 0, \quad (18)$$

де $\psi_{(\pm)}$ – 2×2 -матриця $(\psi_{(\pm)})_{\alpha}^{\beta} = (\psi_{\pm} \sigma)_{\alpha}^{\beta}$, $(\sigma)_{\alpha}^{\beta}$ – звичайні матриці Паулі. Рівняння (11) та (12) випливають з рівнянь (18) та формули, яка визначає добуток матриць Паулі:

$$\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} I + i \varepsilon_{ikl} \sigma_l. \quad (19)$$

Введемо замість 10 комплексних величин E_{ij} та H_{ij} 10 комплексних величин (аналогів векторам Рімана–Зільберштейна):

$$\psi_{(\pm)ij} = E_{ij} \pm i H_{ij}. \quad (20)$$

Визначимо спінтензор

$$\psi_{(\pm)\alpha\beta\gamma\delta} = \psi_{(\pm)ij} (\sigma_i)_{\alpha\beta} (\sigma_j)_{\gamma\delta}, \quad (21)$$

де $(\sigma_i)_{\alpha\beta} = (\sigma_i)_{\alpha}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta}$ – симетричні матриці, тобто $(\sigma_i)_{\alpha\beta} = (\sigma_i)_{\beta\alpha}$, $\varepsilon_{\gamma\beta}$ – повністю антисиметричний одиничний символ Леві–Чивіта, $\varepsilon_{12} = 1$. Можна довести, що спін-тензор (21) повністю симетричний.

Наведемо тепер рівняння Вейля, рівняння Максвелла, та рівняння Бронштейна у спінорній формі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\alpha}^{\eta} \psi_{(\pm)\eta} = 0, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\alpha}^{\eta\beta} \psi_{(\pm)\eta\beta} = 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\alpha}^{\eta\beta\gamma\delta} \psi_{(\pm)\eta\beta\gamma\delta} = 0. \quad (24)$$

Запис наведених рівнянь у спінорній формі переконливо демонструє спорідненість всіх цих рівнянь.

Рівняння (22)–(24) – це релятивістські хвильові рівняння у нерелятивістських позначеннях. Релятивістська інваріантність цих рівнянь не є очевидною. Це недолік цих рівнянь. У позначеннях, що введені ван дер Варденом (звичайні спінорні індекси та індекси з крапкою), вони набувають вигляду

$$\begin{aligned} (\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(-)\alpha}(x) &= 0, \\ (\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(+)}^{\dot{\alpha}}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(-)\alpha\beta}(x) = 0, \quad (26)$$

$$(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(+)}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) = 0,$$

$$(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(-)\alpha\beta\gamma\delta}(x) = 0, \quad (27)$$

$$(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \psi_{(+)}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}}(x) = 0,$$

де матриці $(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}$ та $(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}$ визначаються як

$$(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} = (\sigma, iI), \quad (\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma, -iI). \quad (28)$$

Рівняння (25)–(27) набувають компактнішої форми, якщо від двокомпонентних спінорів перейти до діраківських чотирикомпонентних біспінорів. При цьому, наприклад у випадку фотона, доцільно від векторів Рімана–Зільберштейна повернутися до комплексних векторів Ландау і Пайерлса $\mathfrak{E} \equiv \mathbf{E}$ та $\mathfrak{H} \equiv \mathbf{H}$ та до чотиривимірного антисиметричного тензора комплексного електромагнітного поля $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x) = (\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x))$, який і вважати хвильовою функцією фотона. У спінорній формі обидві пари рівнянь Максвелла

$$F_{\mu\nu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \quad (29)$$

набувають такого вигляду

$$(\gamma_{\mu})_{\alpha}^{\beta} F_{\rho\sigma,\mu} (\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma})_{\beta}^{\delta} = 0, \quad \text{тобто} \quad \gamma_{\mu} F_{\rho\sigma,\mu} \gamma_{\rho}\gamma_{\sigma} = 0, \quad (30)$$

де γ_{μ} – матриці Дірака, а хвильові рівняння для безмасового нотофа [18] $F_{\mu}(x) = (\mathbf{F}(x), iF_0(x))$

$$F_{\mu,\mu} = 0, \quad F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = 0, \quad (31)$$

набувають такого вигляду

$$(\gamma_{\mu})_{\alpha}^{\beta} F_{\rho,\mu} (\gamma_{\rho})_{\beta}^{\delta} = 0, \quad \text{тобто} \quad \gamma_{\mu} F_{\rho,\mu} \gamma_{\rho} = 0. \quad (32)$$

(Про спінорний аналіз та застосування спінорів у теорії релятивістських хвильових рівнянь та у загальній теорії відносності див. [19–21].)

4. Три різновиди рівнянь Прока, фотон та нотоф

Релятивістські хвильові рівняння для масивної частинки зі спіном 1 (рівняння Прока) можна записати у трьох (при $m \neq 0$) формах [22]:

$$F_{\mu\nu,\nu} = m^2 F_{\mu}, \quad (33)$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = F_{\mu\nu}, \quad (34)$$

$$W = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + m^2(|\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2), \quad (35)$$

де W – густина енергії. Прока вважав, що його рівняння більш відповідні для опису електрона, ніж рівняння Дірака.

Можна також записати рівняння Прока та позитивну густину енергії у такій формі [23]:

$$F_{\mu\nu,\nu} = F_\mu, \quad (36)$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = m^2 F_{\mu\nu}, \quad (37)$$

$$W = m^2(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) + |\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2. \quad (38)$$

Рівняння (33)–(35) у певному сенсі симетричні рівнянням (36)–(38): у першому випадку у безмасовій границі ми втрачаємо нотоф, в другому – фотон. Якщо рівняння (33)–(35) описують “масивний фотон”, то рівняння (36)–(38) описують “масивний нотоф”. У статті [23] перший та другий варіанти рівнянь Прока детально проаналізовані з використанням рівнянь Баргмана–Вігнера [24].

Третій варіант рівнянь Прока було використано у роботі Басса та Шредингера [25]. У безмасовій границі цих рівнянь “виживають” і фотон, і нотоф:

$$F_{\mu\nu,\nu} = mF_\mu, \quad (39)$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = mF_{\mu\nu}, \quad (40)$$

$$W = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + |\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2. \quad (41)$$

В останніх рівняннях $F_{\mu\nu}$ та F_μ мають однакову розмірність, бо і $F_{\mu\nu}$, і F_μ це рівноправні компоненти однієї багатокomпонентної хвильової функції. Третій варіант рівнянь Прока просто узагальнюється на випадок п’ятивимірного часопростору, що і буде використано у даній роботі. Слід відзначити, що використаний нами п’ятивимірний опис фотонів та гравітонів вперше було застосовано у теорії релятивістських рівнянь довільного спіну Й.К. Любаньським у 1942 р. [26] і п’ята додаткова просторово-подібна координата цілком рівноправна з іншими трьома просторово-подібними координатами. Ця п’ятивимірність значно простіша і не пов’язана з п’ятивимірними теоріями Т. Калуци [27] та О. Кляйна [28].

5. Рівняння Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Спочатку розглянемо звичайну масивну нерелятивістську частинку зі спіном 2. Тобто будемо вважати, що хвильова функція масивного гравітона це повністю симетричний спін-тензор четвертого рангу:

$$\varphi_{abcd} = \varphi_{abcd}(\mathbf{x}, t). \quad (42)$$

Як було доведено Е. Майораною у 1928 р. [29], довільна хвильова функція (42) завжди може бути представлена у вигляді:

$$\varphi_{abcd} = A\{\varphi_a^{(1)}\varphi_b^{(2)}\varphi_c^{(3)}\varphi_d^{(4)}\}, \quad (43)$$

де A – деяка константа, позначення $\{\}$ означає повну симетризацію за усіма індексами, $\varphi_a^{(i)}$ – певні двокомпонентні спінори². При переході до релятивістської теорії, у випадку спіну $\frac{1}{2}$, нерелятивістський спінор φ_a ($a = 1, 2$) потрібно замінити 4-компонентним діраківським біспінором ψ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), який задовольняє рівняння Дірака:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_\alpha^\beta \psi_\beta(x) = 0, \quad (44)$$

де γ_μ – матриці Дірака, $x_\mu = (\mathbf{x}, it)$ та m – часопросторова координата та маса частинки. Природно у (43) усі чотири нерелятивістські спінори замінити діраківськими біспінорами та вважати, що хвильова функція масивного гравітона має вигляд:

$$\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = A\{\psi_\alpha^{(1)}\psi_\beta^{(2)}\psi_\gamma^{(3)}\psi_\delta^{(4)}\}. \quad (45)$$

Ясно, що хвильова функція (45) задовольняє рівняння Баргмана–Вігнера [24]:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_\alpha^\lambda \psi_{\lambda\beta\gamma\delta}(x) = 0. \quad (46)$$

Оскільки спін-тензор $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ є повністю симетричним, то немає значення на який індекс діє матриця $(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)$.

² Теорема Майорани була перевідкрита Р. Пенроузом у 1960 р. [30] і використана для аналізу алгебраїчних властивостей тензора кривизни у загальній теорії відносності (класифікації типів гравітаційних полів за Петровим [31]).

6. П'ятивимірний форма рівнянь

Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Рівняння Дірака (44) можна представити у п'ятивимірному вигляді. Домножимо рівняння (44) на $i\gamma_5$,

$$\left(i\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + im\gamma_5\right)\psi = 0. \quad (47)$$

Введемо п'яту координату X_5 , нову хвильову функцію

$$\Psi(x, X_5) = e^{imX_5}\psi(x), \quad (48)$$

та нові матриці Γ_A ($A = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$\Gamma_\mu = i\gamma_5\gamma_\mu, \Gamma_5 = \gamma_5. \quad (49)$$

П'ять координат ($X_\mu = x_\mu, X_5$) ми будемо позначати великою літерою X . Тепер можемо записати рівняння Дірака для хвильової функції (48) у вигляді

$$\Gamma_A\frac{\partial}{\partial X_A}\Psi(X) = 0. \quad (50)$$

Зробивши аналогічні зміни з рівнянням (46), переписемо його у такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial X_A}(\Gamma_A)^\lambda\Psi_{\lambda\beta\gamma\delta}(X) = 0. \quad (51)$$

7. П'ятивимірний тензорна форма рівнянь

Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Спочатку розглянемо випадок масивного фотона. Будемо вважати, аналогічно до (45), що хвильова функція масивного фотона – це повністю симетричний тензор 2 рангу:

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = A\{\psi_\alpha^{(1)}\psi_\beta^{(2)}\}, \quad (52)$$

де A – деяка константа. Ясно, що хвильова функція (52) задовольняє рівняння Баргмана–Вігнера:

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)^\lambda\psi_{\lambda\beta}(x) = 0. \quad (53)$$

У п'ятивимірному просторі $X_A = (X_\mu = x_\mu, X_5)$ хвильова функція

$$\Psi_{\alpha\beta}(X) = e^{imX_5}\psi_{\alpha\beta}(x) \quad (54)$$

задовольняє рівняння, аналогічне до (51):

$$\frac{\partial}{\partial X_A}(\Gamma_A)^\lambda\Psi_{\lambda\beta}(X) = 0. \quad (55)$$

Введемо інфінітезимальні оператори $(S_{AB})^\beta_\alpha$ узагальненої групи Лоренца $SO(4, 1)$, які діють на діраківські біспінори у п'ятивимірному просторі з п'яти-координатами X_A та інваріантною формою $X_A X_A$:

$$S_{AB} = \frac{\Gamma_A\Gamma_B - \Gamma_B\Gamma_A}{4i}, \quad (56)$$

Розглянемо нові матриці

$$(S_{AB})^{\alpha\beta} = (C^{-1})^{\alpha\gamma}(S_{AB})^\beta_\gamma, \quad (57)$$

де C – антисиметрична матриця зарядового спряження $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$. Десять матриць $(S_{AB})^{\alpha\beta}$ мають такі важливі властивості симетрії:

$$(S_{AB})^{\alpha\beta} = -(S_{BA})^{\alpha\beta} = (S_{AB})^{\beta\alpha}. \quad (58)$$

Введемо тензорну хвильову функцію масивного фотона:

$$\Phi_{AB}(X) = -\Phi_{BA}(X) = (S_{AB})^{\alpha\beta}\Psi_{\alpha\beta}(X). \quad (59)$$

Неважко впевнитися, що хвильова функція (59) задовольняє такі рівняння:

$$\Phi_{AB,B} = 0, \quad (60)$$

$$\Phi_{AB,C} + \Phi_{BC,A} + \Phi_{CA,B} = 0, \quad (61)$$

де комою позначено частинну похідну, тобто $\Phi_{,A} \equiv \frac{\partial}{\partial X_A}\Phi$.

Введемо хвильову функцію у просторі Мінковського $F_{AB}(x)$:

$$\Phi_{AB}(X) = e^{imX_5}F_{AB}(x), \quad (62)$$

та позначення

$$F_{\mu 5}(x) = iF_\mu(x). \quad (63)$$

Для функцій $F_{\mu\nu}$ та F_μ рівняння (60) та (61) перейдуть у рівняння Прока (39) та (40) для масивної частинки зі спіном 1:

$$F_{\mu\nu,\nu} = mF_\mu, \quad (64)$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = mF_{\mu\nu}. \quad (65)$$

З рівнянь (61) та позначень у рівняннях (62)–(64) впливає рівняння (66):

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \quad (66)$$

Аналогічно із (60) та умов (62)–(64) отримуємо (67):

$$F_{\mu,\mu} = 0. \quad (67)$$

Безмасову границю рівнянь Прока (64), (65) була вперше проаналізовано у 1955 р. Басом та Шредінгером [25]. При $m = 0$ ми одержимо з рівнянь (64)–(67) такі вирази:

$$F_{\mu\nu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \quad (68)$$

$$F_{\mu,\mu} = 0, \quad F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = 0. \quad (69)$$

Рівняння (68) є звичайними рівняннями Максвелла для комплексних полів $F_{\mu\nu}(x)$, тобто хвильовими рівняннями для фотонів (T -фотонів, згідно з [25]). Рівняння (69) відповідають частинкам, які у [25] було названо L -фотонами, а пізніше – “нотонами” [18]. З (69) випливає, що

$$F_{\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}}, \quad \square\phi = 0, \quad (70)$$

тобто L -фотон, або нотон – це звичайна безмасова скалярна частинка. Таким чином, ми бачимо, що у випадку масивного фотона, який має 3 ступені поляризації, при $m \rightarrow 0$ залишаються усі 3 стани, на відміну від хибного уявлення, поширеного Вігнером [3] (Згідно з Вігнером у безмасовій границі, при $m \rightarrow 0$, залишаються лише максимальні проекції спіну на напрямок руху частинки, в загальному випадку спіну S , проекції S та $-S$).

Аналогічно до (59), тензорна хвильова функція масивного гравітона має вигляд:

$$G_{ABCD}(X) = S_{AB}^{\alpha\beta} S_{CD}^{\gamma\delta} \Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(X). \quad (71)$$

Зрозуміло, що

$$G_{ABCD}(X) = -G_{BACD}(X) = -G_{ABDC}(X) = G_{CDAB}(X). \quad (72)$$

З узагальнених співвідношень Паулі–Фірца [32] випливає, що

$$G_{ABCB}(X) = 0, \quad (73)$$

$$\varepsilon_{ABCDE} G_{ABCD}(X) = 0. \quad (74)$$

З рівнянь Баргмана–Вігнера (51) витікає, що нова хвильова функція задовольняє рівняння

$$G_{ABCD,D}(X) = 0, \quad (75)$$

$$G_{ABCD,E} + G_{ABDE,C} + G_{ABEC,D} = 0. \quad (76)$$

Ці рівняння не є незалежними: (75) можна отримати із (76) згортокою за парою індексів. Впевнімося у тому, що отримані властивості симетрії тензора G_{ABCD} обмежують кількість його компонент до тієї самої кількості, що і властивості симетрії хвильової функції у формі Баргмана–Вігнера $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, яка є повністю симетричним спінтензором четвертого рангу у чотиривимірному спінорному просторі. Кількість компонент у повністю симетричного тензора n -го рангу у m -вимірному просторі можна знайти за формулою:

$$N = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}, \quad (77)$$

що у нашому випадку дає $N = 35$. Співвідношення (72) обмежують кількість компонент тензора G_{ABCD} до $\frac{10(10+1)}{2} = 55$: 15 рівнянь (73) та 5 рівнянь (74) зменшують загальну кількість до $N = 55 - 15 - 5 = 35$. Таким чином, кількість компонент хвильових функцій $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ та G_{ABCD} збігаються.

Ми бачимо, що симетричні властивості тензора хвильової функції гравітона (71) збігаються з властивостями лінеаризованого тензора Вейля [33] 5-вимірного простору.

8. Узагальнені рівняння Прока для масивного гравітона

Використовуючи рівняння (73), представимо тензорну функцію масивного гравітона у чотиривимірному вигляді:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (78)$$

$$G_{5\nu\rho\sigma} = iH_{\rho\sigma\nu}, \quad (79)$$

$$G_{5\mu 5\nu} = H_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}, \quad (80)$$

$$R_{\mu\mu} = R = 0. \quad (81)$$

Підставляючи ці властивості у рівняння (73)–(76), отримуємо такі вирази:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\lambda} + R_{\mu\nu\sigma\lambda,\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho,\sigma} = 0, \quad (82)$$

$$H_{\nu\sigma,\lambda} - H_{\nu\lambda,\sigma} = mH_{\sigma\lambda\nu}. \quad (83)$$

Із рівнянь (75) випливає, що

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\sigma} = -mH_{\mu\nu\rho}. \quad (84)$$

Наслідком рівняння

$$H_{\mu\nu\rho,\sigma} - H_{\mu\nu\sigma,\rho} = -mR_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (85)$$

є рівність

$$H_{\rho\sigma\nu,\sigma} = -mH_{\nu\rho}. \quad (86)$$

Із (76) також випливає

$$H_{\rho\sigma\nu,\lambda} + H_{\sigma\lambda\nu,\rho} + H_{\lambda\rho\nu,\sigma} = 0. \quad (87)$$

У чотиривимірному позначенні з рівняння (75) можна отримати таке важливе співвідношення:

$$H_{\mu\nu,\nu} = 0. \quad (88)$$

Розглянемо безмасову границю рівнянь для масивного гравітона (78)–(88). При $m = 0$ рівняння (83) перейдуть у

$$H_{\nu\sigma,\lambda} - H_{\nu\lambda,\sigma} = 0, \quad (89)$$

Як наслідок, тензор $H_{\nu\sigma}$ є похідною другого порядку від скалярної функції:

$$H_{\nu\sigma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}, \quad (90)$$

За аналогією до роботи Баса та Шредінгера, назовемо частинки, які відповідають цим рівнянням LL-гравітоном. Запишемо попередні вирази для випадку нульової маси. Рівняння (82), (87) та (88) залишаться без змін. Рівняння (84)–(86) можна записати як:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\sigma} = 0, \quad (91)$$

$$H_{\mu\nu\rho,\sigma} - H_{\mu\nu\sigma,\rho} = 0, \quad (92)$$

$$H_{\rho\sigma\nu,\sigma} = 0, \quad (93)$$

Залишилися три рівності симетрії

$$H_{\rho\sigma\sigma} = 0, \quad (94)$$

$$H_{\mu\nu\rho} + H_{\nu\rho\mu} + H_{\rho\mu\nu} = 0, \quad (95)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \quad (96)$$

Розглянемо детальніше рівняння (92), (94) та (95). З них можна отримати вирази:

$$H_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}, \quad (97)$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (98)$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial f_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (99)$$

Частинку, яка задовольняє цим рівнянням, знову ж, згідно з [25], назовемо TL-гравітоном.

З рівнянь (81), (91), (96) випливають рівняння Бронштейна [10], що відповідають частинкам зі спіральністю ± 2 , тобто TT-гравітонам. Необхідно зазначити, що спіральність суперпозиції лівого та правого гравітонів може дорівнювати довільному дійсному числу між 2 та +2, в тому числі й 0. Випадок нуля є аналогом лінійної поляризації фотонів, саме з таких гравітонів складаються гравітацій хвилі, які були зареєстровані у 2015–2017 рр. Це зауваження стосується і TL-гравітонів. Зауважимо, що у випадку рівнянь Айнштайна, компоненти тензора $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ є дійсними числами, а в рівняннях Бронштейна – комплексними, оскільки тензор $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ це хвильова функція гравітона.

9. Висновки

За допомогою редукції рівнянь Баргмана–Вігнера для безмасового гравітона в 5-вимірному просторі одержано систему хвильових рівнянь, які описують динаміку масивного гравітона в 4-вимірному просторі. В границі нульової маси ці рівняння переходять у рівняння Клейна–Гордона для хвильової функції безмасової скалярної частинки, вакуумні рівняння Максвела для частинок зі спіральностями +1 та –1, а також у рівняння Бронштейна для гравітонів зі спіральностями +2 та –2. Знайдені рівняння узагальнюють на випадок спіну 2 рівняння Прока у формулюванні Баса та Шредінгера й доводять можливість збереження у безмасовій границі всіх 5 станів поляризації масивної частинки зі спіном 2. За аналогією до роботи Баса та Шредінгера, частинки з цими станами названо LL-гравітоном (спіральність 0), TL-гравітоном (спіральність ± 1) і TT-гравітоном (спіральність ± 2). Саме TT-гравітони відповідають частинкам, які вперше були описані М. Бронштейном [10].

1. A.S. Goldhaber, M.M. Nieto. Photon and graviton mass limits. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 939 (2010).
2. C. de Rham, J.T. Deskins, A.J. Tolley, S.-Y. Zhou. Graviton mass bounds. *Rev. Mod. Phys.* **89**, 025004 (2017).
3. E.P. Wigner. Relativistic invariance and quantum phenomena. *Rev. Mod. Phys.* **29**, 255 (1957).
4. L. Landau, R. Peierls. Quantum electrodynamics in the configuration space. *Zs. Phys.* **62**, 188 (1930).
5. I. Bialynicki-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics* **36**, edited by E. Wolf (Elsevier, 1996) [quant-ph/0508202].
6. I. Bialynicki-Birula. Photon as a quantum particle. *Acta Physica Polonica B* **37**, 935 (2006).
7. I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicka-Birula. The role of the Riemann–Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 053001 (2013).
8. Yu.P. Stepanovskiy. The little Lorentz group and wave equations of free massless fields with arbitrary spin. *Ukr. J. Phys.* **9**, 1165 (1964).
9. H. Weyl. Electron and gravitation. *Z. Phys.* **56**, 330 (1929).
10. M.P. Bronstein. Quantization of gravitational waves. *JETP* **6**, 195 (1936).
11. Ю. П. Степановский, О волновых уравнениях безмассовых полей. *Теор. Мат. Физ.* **47**, 343 (1981).
12. Yu.P. Stepanovsky. Stepanovskiy Maxwell equation to Berry's phase and sonoluminescence: Problems of theory of electromagnetic and other massless fields. *Electromagnetic phenomena* **1**, 180 (1998).
13. Yu.P. Stepanovsky. On massless field and infinite component relativistic wave equations. *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* **102** (1), 407 (2001).
14. Yu.P. Stepanovsky. Ettore Majorana and Matvei Bronstein (1906–1938): Men and scientists. In: *Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2002), p. 435 [ISBN: 978-94-010-0347-6].
15. Yu.P. Stepanovsky. In: *Problems in Contemporary Physics* (КИПТ, 2008) (in Russian) [ISBN: 978-966-2136-15-9].
16. B.L. Van der Waerden. Spinor analysis. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.* 100 (1929).
17. O. Laporte, G.E. Uhlenbeck. Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations. *Phys. Rev.* **37**, 1380 (1931).
18. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Нотоф и его возможные взаимодействия. *Ядерн. Физ.* **4**, 216 (1966).
19. Yu.B. Rumer. *Spinor Analysis* (Librocom, 2010) (in Russian) [ISBN: 978-5-397-01381-9].
20. Yu. B. Rumer, A.I. Fet. *Group Theory and Quantum Fields* (Nauka, 1977) (in Russian).
21. R. Penrose, W. Rindler. *Spinors and Space-Time* (Cambridge University Press, 1984) [ISBN: 0521337070].
22. A. Proca. Wave theory of positive and negative electrons. *J. Phys. Radium* **7**, 347 (1936).
23. V.V. Dvoeglazov Photon-notoph equations. *Physica Scripta* **64**, 201 (2001).
24. V. Bargmann, E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **34**, 211 (1948).
25. L. Bass, E. Schrödinger. Must the photon mass be zero? *Proc. R. Soc. Lond. A* **232**, 1 (1955).
26. J.K. Lubański. Sur la theorie des particules elementaires de spin quelconque. I. *Physica* **9**, 310 (1942).
27. T. Kaluza. Zum unitatsproblem der physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)* 966 (1921).
28. O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeit. Phys.* **37**, 895 (1926).
29. E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cimento* **9**, 43 (1932).
30. R. Penrose. A spinor approach to general relativity. *Ann. Phys.* **10**, 171 (1960).
31. А.З. Петров. Классификация пространств определяющих поля тяготения. *Учен. Записки Казан. Госуд. Univ.* **114**, 55 (1954).
32. Yu.P. Stepanovsky. Complete set of Fierz's relations in six-dimensional form. *Ukr. J. Phys.* **11**, 1191 (1966).
33. H. Weyl. Reine infinitesimalgeometrie. *Mat. Zeit.* **2**, 384 (1918).

Одержано 26.01.18

A. Hradyskiy, Y. Stepanoskiy

THE MASSLESS LIMIT
OF BARGMANN–WIGNER EQUATIONS
FOR A MASSIVE GRAVITON

S u m m a r y

Information about the discovery of gravity waves attract attention to the graviton's mass problem. The massive graviton is a spin-2 particle with a non-zero mass. In this work, relativistic wave equations for a massive graviton have been studied in the limiting case of zero particle mass. The equations for the non-zero-mass graviton are based on the Bargmann–Wigner equations in the five-dimensional space-time with the $(++++-)$ signature. In the massless limit of massive graviton, all states with possible helicity values -0 (LL-graviton), ± 1 (TL-graviton), and ± 2 (TT-graviton) –are preserved.