Б. СОБКО

Львівський національний університет ім. Івана Франка, кафедра теоретичної фізики
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: bohdanka.sobko.d@gmail.com)

УДК 530.145 + 531.19

ЗВ'ЯЗОК ПАРАМЕТРІВ ДРУГОГО ВІРІАЛЬНОГО КОЕФІЦІЄНТА НЕАБЕЛЕВИХ ЕНІОНІВ З ДВОПАРАМЕТРИЧНИМИ ДРОБОВИМИ СТАТИСТИКАМИ

У цій роботі показано зв'язок між параметрами другого віріального коефіцієнта для системи неабелевих еніонів та двопараметричними модифікаціями дробових статистик Голдейна–Ву та Поліхронакоса. Розраховано параметри, для яких неабелеві еніони можуть описуватись даними типами статистик. Розглянуто границю, в якій параметр неадитивності/неповноти q прямує до одиниці.

Ключові слова: віріальний коефіцієнт, неабелеві еніони, неадитивна/неповна двопараметрична статистика, дробова статистика Голдейна–Ву, дробова статистика Поліхронакоса.

1. Вступ

У 1977 році Лайнос та Міргайм довели, що традиційний поділ частинок на бозони та ферміони не є застосовний для двовимірного простору [1]. Френк Вільчек запропонував для таких частинок назву еніони через те, що під час перестановки двох частинок фаза хвильової функції може змінюватись на довільний множник, а не лише 0 чи π [2]. Математично така статистика відповідає групі кіс, а не групі перестановок.

Еніони використовуються в описі дробового квантового ефекту Холла, який спостерігається в двовимірних системах електронів за низьких температур у сильному магнітному полі [3–6]. На основі еніонів було запропоновано побудувати топологічний квантовий комп'ютер, який через свою топологічну природу повинен бути набагато більш толерантним до перешкод та помилок, ніж "звичайний" квантовий комп'ютер [7, 8]. Зауважимо, що є деякі експериментальні підтвердження існування збуджень, що відповідають еніонам [9–11]. Особливу увагу варто приділити такому прикладу: іще у 2016 році було запропоновано теоретичний опис еніонного колайдера колаборацією фізиків [24]. Уже у квітні 2020 року група французьких вчених експериментально довела існування таких частинок [25]. В дослідженні було продемонстровано абелеву дробову статистику у режимі квантового ефекту Холла при факторові заповнення $\nu = 1/3$, шляхом вимірювання кореляційних характеристик струму, що виникають внаслідок зіткнення між еніонами при розщепленні пучка.

Але еніони є ще не найекзотичнішим видом частинок. У 1991 році Ґреґорі Мур та Ніколас Рід запропонували новий тип частинок, які назвали неабеліонами [12]. Неабелева статистика означає, що якщо у нас є кілька тотожних частинок, то перестановки в різних парах не обов'язково комутують одна з одною. Таке може бути тоді, коли перестановка двох частинок призводить не просто до фазового множника, а взагалі змінює хвильову функцію стану. В принципі, в групі кіс такі ситуації цілком реалізуються [13]; з точки зору фізики треба тільки щоб основний стан системи квазічастинок був не єдиним, а виродженим.

Існують докази, що саме така екзотична ситуація реалізується в цілком конкретній системі – електронній рідині в режимі дробового квантового ефекту Холла з фактором заповнення 5/2. У 2005 році було показано експериментально, що елементарні збудження при цьому значенні фактора заповнення мають дробовий заряд $e/4$ [14], а в роботі [15] – ще й заряд $e/2$.

Інтерес до подібних експериментів інтерферометрії [16] зріс в останні роки, що зумовлено можливістю побудови квантового комп'ютера, який би виконував операції, маніпулюючи неабелевими квазічастинками. Дію квантового комп'ютера можна описати унітарним перетворенням, а в топологічному квантовому комп'ютері воно складається з матриць, що описують "плетіння" квазічастинок.

У цій роботі ми знайдемо зв'язок між параметрами другого віріального коефіцієнта системи неабелевих еніонів з різними видами дробових статистик. Отримані результати можна використовувати для ефективної побудови термодинаміки неабелевих еніонів, узгодженої з іншими – математично простішими – статистиками.

2. Неабелеві еніони

Неабелеві еніони, що вивчаються в цій роботі, – неабелеві безспінові частинки Черна–Саймонса (NACS). Це точкові частинки, які взаємодіють за допомогою топологічного неабелевого ефекту Ааронова–Бома, несуть неабелеві заряди та неабелеві магнітні потоки, завдяки чому вони набувають дробових спінів і підкоряються статистиці кіс, як і абелеві еніони [17].

Для неабелевих еніонів було проведено дослідження термодинамічних властивостей найнижчого рівня Ландау в сильному магнітному полі і показано, що віріальні коефіцієнти не залежать від параметрів статистики [18]. У порівнянні з абелевим випадком, термодинаміку системи вільних неабелевих еніонів виявляється набагато важче вивчити, адже усі наявні результати є для граничних умов з моделлю жорсткої серцевини [19], а у випадку неабелевих еніонів з м'якою серцевиною немає точних результатів навіть для другого віріального коефіцієнта. Відповідно, через те ми можемо порахувати лише наближено термодинаміку системи неабелевих еніонів. У роботі [17] показано зв'язок другого віріального коефіцієнта для неабелевих еніонів з різними параметрами жорсткості (твердості) серцевини. У даній роботі буде розглянуто випадок жорсткої серцевини.

Гамільтоніан вільних NACS-частинок має такий вигляд [17]:

$$\begin{aligned} H_N &= -\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\mu_\alpha}(\nabla_{\bar z_\alpha}\nabla_{z_\alpha}+\nabla_{z_\alpha}\nabla_{\bar z_\alpha}),\\ \nabla_{z_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial z_\alpha}+\frac{1}{2\pi\kappa}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\hat Q^a_\alpha\hat Q^a_\beta\frac{1}{z_\alpha-z_\beta},\\ \nabla_{\bar z_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де індекс $\alpha = 1,...,N$ нумерує частинки, а $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, $\bar z_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$ – їхні просторові координати. Тут κ — параметр теорії, причому $4\pi\kappa$ – ціле число. Оператори $\hat Q^a$ – так звані ізовектори в представленні ізоспіну l, що за своєю природою є операторами моменту кількості руху. Значення l квантовані і змінюються у множині всіх цілих і напівцілих чисел, при цьому $l = 1/2$ є мінімальним можливим нетривіальним значенням ($l = 0$ відповідає системі вільних бозонів) [17]. Тоді віріальні коефіцієнти залежать в цілому від величини квантового числа ізоспіну l і від параметра κ.

Статистичну механіку NACS-частинок можна вивчити, ввівши функцію великої статистичної суми Ξ, визначеної в термінах гамільтоніана H_N для N-частинкових статистичних сум Z_N та активності (фугативності) z:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \mathrm{Tr} e^{-\beta H_N}. \tag{2.2}$$

Зауважимо, що буде справедливе таке кластерне розвинення:

$$\Xi = \exp\left\{A\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n z^n\right\}, \tag{2.3}$$

де A – площа газу (звісно, це еквівалент об'єму V у двовимірній задачі), а $\mathcal{B}_n$ – n-ті кластерні інтеграли. Причому,

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{A}Z_1, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{1}{A}\left\{Z_2 - \frac{Z_1^2}{2}\right\}. \tag{2.4}$$

Віріальне розвинення для рівняння стану за степенями густини $\rho = N/A$ дає:

$$p = \rho T\left[1 + b_2(\rho\lambda_T^2) + b_3(\rho\lambda_T^2)^2 + ...\right], \tag{2.5}$$

де довжина теплової хвилі де Бройля частинки з масою m

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT}}, \tag{2.6}$$

а b_n– безрозмірні n-ті віріальні коефіцієнти. Другий віріальний коефіцієнт має такий вигляд:

$$b_2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = A\left\{\frac{1}{2} - \frac{Z_2}{Z_1^2}\right\}. \tag{2.7}$$

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2021. Т. 66, № 7

Візьмемо вираз для другого віріального коефіцієнта з праці [17], у якій детально показано розрахунок b_2:

$$b_2(\kappa, l) = -\frac{1}{4(2l+1)}\Bigg[1 + \frac{1}{(2l+1)}\sum_{j=0}^{2l}(2j+1) \times \\ \times\Big\{\big(1 + (-1)^{j+2l}\big)(\gamma_j^2 - 2\gamma_j) + \\ + \big(1 - (-1)^{j+2l}\big)[(\gamma_j + 1) \bmod 2 - 1]^2\Big\}\Bigg], \tag{2.8}$$

де l – ізоспін, а параметри γ_j та ω_j пов'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \omega_j \bmod 2, \\ \omega_j &= \frac{1}{4\pi\kappa}[j(j+1) - 2l(l+1)]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

На рисунку проілюстровано залежність другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів від параметрів k та l. Варто зазначити, що, хоча параметри k та l змінюються відповідно у множині цілих та напівцілих значень, для покращення візуальної сприйнятності на графіку було з'єднано точки, що належать до конкретних значень параметрів k та l.

3. Двопараматеричні дробові статистики

Із виразу для чисел заповнення можна знайти кластерні інтеграли, через які виражаються віріальні коефіцієнти. Функція розподілу пов'язана із кластерними інтегралами таким чином:

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{A}\sum_j G_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell, \tag{3.1}$$

де G_j – виродження j-го енергетичного рівня ε_j, z – активність (фугативність).

Розглядатимемо вільні частинки у двовимірному просторі і у виразі (3.1) перейдемо від суми по j до інтеграла за енергіями з густиною станів [26]

$$g(\varepsilon) = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} \tag{3.2}$$

і далі розкладатимемо отриманий результат за степенями z.

Розглянемо кілька двопараметричних статистичних моделей для еніонів [20].

3.1. Статистика Поліхронакоса

Для статистики Поліхронакоса середні числа заповнення матимуть вигляд:

$$n_j^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) + \gamma}, \tag{3.3}$$

де $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$, а $\gamma = -\gamma'$ – параметр статистики.

3.1.1. Неповна статистика Поліхронакоса

Модифікуючи звичну статистику Поліхронакоса таким чином, що $X(\varepsilon_j) = e^{q\varepsilon_j/T}$, де q – параметр деформації, можна отримати двопараметричну залежність. Така модифікація носить назву неповної статистики Поліхронакоса. Другий віріальний коефіцієнт тоді набуде вигляду:

$$b_2^{\mathrm{IPS}} = -\frac{\gamma}{4}q. \tag{3.4}$$

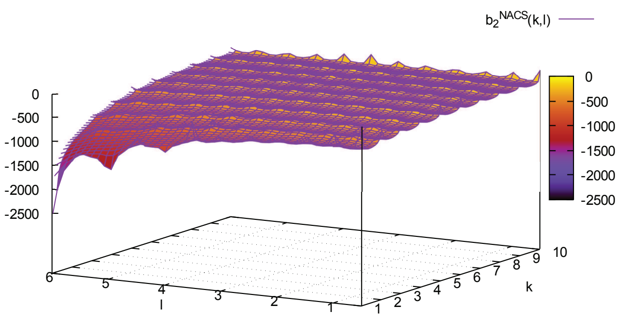
3.1.2. Неадитивна статистика Поліхронакоса

Модифікуємо звичайну статистику Поліхронакоса q-експонентою Цалліса [21]:

$$e_q^x = \begin{cases} \exp(x), & \text{якщо } q = 1, \\ [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і} \\ & 1 + (1-q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ і} \\ & 1 + (1-q)x \leq 0. \end{cases}$$

Остання рівність залежно від параметра неадитивності q може бути переписана таким чином:

$$0^{1/(1-q)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } q < 1, \\ \infty, & \text{якщо } q > 1. \end{cases}$$



(Кольоровий онлайн). Залежність другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів від параметрів l та k

Таблиця 1. **Результати розрахованих значень параметрів q дробових статистик залежно від еніонних k та l. Для кожного значення параметра l лівий стовпець відповідає $q_{\text{IPS}} = q_{\text{IHWS}}$, а правий – $q_{\text{NAPS}} = q_{\text{NAHWS}}$**

k	$l = 1/2$		$l = 1$		$l = 3/2$		$l = 2$	
1	1,0000	1,0000	89,000	45,478	136,000	68,986	1753,0	877,50
2	0,2500	0,4215	13,000	7,3807	31,000	16,443	397,00	199,50
3	0,3333	0,5000	9,8889	5,7973	12,667	7,2116	158,33	80,154
4	0,4375	0,5897	5,0000	3,2656	6,6250	4,1171	101,00	51,481
5	0,5200	0,6562	3,8800	2,6673	4,0000	2,7322	89,000	45,478
10	0,7300	0,8136	2,1200	1,6880	1,0000	1,0000	19,400	10,614
20	0,8575	0,9034	1,4800	1,3064	0,6250	0,7367	3,4000	2,4064
50	0,9412	0,9605	1,1728	1,1132	0,7600	0,8351	1,6720	1,4234
100	0,9703	0,9801	1,0832	1,0550	0,8650	0,9085	1,2880	1,1867
1000	0,9970	0,9980	1,0080	1,0054	0,9852	0,9901	1,0245	1,0163

Таблиця 2. **Параметри γ та g, пов'язані з ізоспіном l**

l	$\gamma_{\text{IPS}} = \gamma_{\text{NAPS}}$	$g_{\text{IHWS}} = g_{\text{NAHWS}}$
1/2	1/2	3/8
1	1/3	5/12
3/2	1/4	7/16
2	1/5	9/20

Детальний опис q-експоненти також викладено у працях [22, 23]. Означення для $q \neq 1$ часто об'єднують за допомогою позначення $[u]_+ \equiv \equiv \max(0, u)$ [22].

У цьому випадку, при $X(\varepsilon_j) = e_q^{\varepsilon_j/T}$, отримаємо неадитивну статистику Поліхронакоса. Тоді другий віріальний коефіцієнт можна отримати у такому вигляді:

$$b_2^{\text{NAPS}} = -\frac{\gamma}{4}\frac{2q^2}{1+q}. \tag{3.5}$$

3.2. Статистика Голдейна–Ву

Середні числа заповнення у цій статистиці виражаються таким чином:

$$n_j^{\text{HW}} = \frac{1}{w\left(z^{-1}X(\varepsilon_j)\right) + g}, \tag{3.6}$$

де $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$, g – параметр статистичної взаємодії, а функція $w(x)$ задовольняє трансцендентне рівняння:

$$w^g(x)\left[1 + w(x)\right]^{1-g} = x. \tag{3.7}$$

Для випадку $g = 0$ розв'язком цього рівняння буде $w(x) = x - 1$ – розподіл Бозе, а при $g = 1$ ми отримуємо $w(x) = x$ – розподіл Фермі. У границі великих значень аргументу функції $w(x)$ вираз для чисел заповнення може бути переписаний у такому вигляді:

$$n_j^{\text{HW}} = \frac{1}{w(x) + g} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/T} + (2g-1)}. \tag{3.8}$$

3.2.1. Неповна статистика Голдейна–Ву

Для неповної статистики Голдейна–Ву, прийнявши що $X(\varepsilon_j) = e^{q\varepsilon_j/T}$, другий віріальний коефіцієнт матиме вигляд:

$$b_2^{\text{IHWS}} = \frac{2g-1}{4}q. \tag{3.9}$$

3.2.2. Неадитивна статистика Голдейна–Ву

У неадитивній статистиці Голдейна–Ву при $X(\varepsilon_j) = = e_q^{\varepsilon_j/T}$ другий віріальний коефіцієнт залежить від параметра неадитивності таким чином:

$$b_2^{\text{NAHWS}} = \frac{2g-1}{4}\frac{2q^2}{(1+q)}. \tag{3.10}$$

4. Результати

Прирівнюючи відповідні множники у виразах для другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів (2.8) та модельних систем (3.4), (3.5), (3.9), (3.10), можна отримати зв'язок для параметрів дробових статистик у випадку, коли через конкретну статистику можливий опис неабелевих еніонів.

Множники $\gamma/4$ або $(2g-1)/4$ зручно прирівняти до $\frac{1}{4(2l+1)}$, адже цей вираз є головним членом у розкладі, тобто параметри γ та g пов'язані з ізоспіном l. Відповідно, параметри q будуть виражатися через l і κ.

Отримані результати можна узагальнити у табл. 1. Для уникнення громіздкості деякі сталі параметри наведено в табл. 2.

Зазначимо, що розрахунок $\gamma_j = \omega_j \bmod 2$ не дуже добре означений для дробових та від'ємних чисел. Тому у даній роботі було використано такий спосіб обчислення: $\gamma_j = \omega_j \bmod 2 = (\lfloor \omega_j \rfloor \bmod 2) + (\omega_j - \lfloor \omega_j \rfloor)$, де $\lfloor x \rfloor$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує x.

Зауважимо, що при великих значеннях параметра k другий множник у виразі для другого віріального коефіцієнта (2.8) має прямувати до одиниці, так само, як і параметр неповноти (неадитивності) статистик q, що й видно з табл. 1.

Наприклад, розглянемо неадитивну статистику Голдейна–Ву. Для великих k значення ω_j є малим, так само як і γ_j. Тому можна подати q як $1+\Delta q$.

$$\frac{2q^2}{1+q} = \frac{2(1+\Delta q)^2}{1+(1+\Delta q)} \simeq \frac{2(1+2\Delta q)}{2+\Delta q} =$$

$$= \frac{2(1+2\Delta q)}{2(1+\frac{\Delta q}{2})} \simeq 2(1+2\Delta q)\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta q}{2}\right) \simeq$$

$$\simeq 1 + 2\Delta q - \frac{\Delta q}{2} \to 1.$$

Врахуємо, що в границі великих κ значення ω_j, як і γ_j є малим. Тому в цій границі вираз для Δq через параметри κ та l можна спрощено подати у такому вигляді:

$$\frac{3}{2}\Delta q = \frac{1}{4\pi\kappa(2l+1)} \sum_{j=0}^{2l} (2j+1) \times$$

$$\times \left[2l(l+1) - j(j+1)\right] \left(1 + (-1)^{j+2l}\right). \tag{4.1}$$

5. Висновки

У цій роботі продемонстровано зв'язок параметрів другого віріального коефіцієнта неабелевих еніонів та двопараметричних неповних і неадитивних модифікацій статистик Голдейна–Ву та Поліхронакоса. Отримано вирази, що пов'язують параметри цих дробових статистик із параметрами неабелевих еніонів на підставі другого віріального коефіцієнта. Розраховано чисельні значення параметрів, за яких неабелеві еніони можуть наближено описуватись такими типами дробових статистик.

Зауважимо, що двопараметричні статистики можуть бути застосовані для моделювання неабелевих еніонів із м'якою серцевиною. Відповідні аналітичні вирази будуть дуже громіздкими, а зв'язки між параметрами знаходяться лише чисельно.

Цю роботу частково профінансовано в межах проекту ФФ-83Ф (номер держреєстрації 0119U002203) МОН України.

1. J. M. Leinaas, J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cimento B* **37**, 1 (1977).
2. F. Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
3. B. I. Halperin. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984).
4. D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek. Fractional statistics and the quantum Hall effect. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722 (1984).
5. A. E. B. Nielsen. Anyon braiding in semianalytical fractional quantum Hall lattice models. *Phys. Rev. B* **91**, 041106 (2015).
6. E. Shech. Two approaches to fractional statistics in the quantum Hall effect: Idealizations and the curious case of the anyon. *Found. Phys.* **45**, 1063 (2015).
7. A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.* **303**, 2 (2003).
8. V. Lahtinen, J. K. Pachos. A short introduction to topological quantum computation. *SciPost Phys.* **3**, 021 (2017).
9. F. E. Camino, W. Zhou, V. J. Goldman. Realization of a Laughlin quasiparticle interferometer: Observation of fractional statistics. *Phys. Rev. B* **72**, 075342 (2005).
10. C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh, M. Franz. Anyons in a weakly interacting system. *Nature Phys.* **3**, 797 (2007).
11. T. Keilmann, S. Lanzmich, I. McCulloch, M. Roncaglia. Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices. *Nature Commun.* **2**, 361 (2011).
12. G. Moore, N. Read. Nonabelions in the fractional quantum Hall effect. *Nucl. Phys. B* **360** 362 (1991).
13. L. Jacak, P. Sitko, K. Wieczorek, A Wójs. *Quantum Hall Systems: Braid Groups, Composite Fermions, and Fracti-*

onal Charge. International series of monographs on physics (Oxford University Press, 2003).
14. M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. Stern, D. Mahalu. Observation of a quarter of an electron charge at the $\nu = 5/2$ quantum Hall state. *Nature* **452**, 829 (2008).
15. R.L. Willett, L.N. Pfeiffer, K.W West. Measurement of filling factor 5/2 quasiparticle interference with observation of charge $e/4$ and $e/2$ period oscillations. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **106** 8853 (2009).
16. W. Bishara, P. Bonderson, C. Nayak, K. Shtengel, J. K. Slingerland. Interferometric signature of non-Abelian anyons. *Phys. Rev. B* **80**, 155303 (2009).
17. F. Mancarella, A. Trombettoni, G. Mussardo. Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons. *Nucl. Phys. B* **867**, 950 (2013).
18. A.P. Polychronakos. Virial coefficients of non-Abelian anyons. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1268 (2000).
19. T. Lee. On statistical mechanics of non-Abelian Chern-Simons particles, preprint arXiv: hep-th/9601018 (1996).
20. A. Rovenchak. Two-parametric fractional statistics models for anyons. *Eur. Phys. J. B* **87**, 175 (2014).
21. C. Tsallis. What are the numbers that experiments provide? *Química Nova* **17**, 468 (1994).
22. J. Naudts. The q-exponential family in statistical physics. *J. Phys.: Conf. Ser.* **201**, 012003 (2010).
23. S. Umarov, C. Tsallis, S. Steinberg. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan J. Math.* **76**, 307 (2008).
24. B. Rosenow, I.P. Levkivskyi, B.I. Halperin. Current correlations from a mesoscopic anyon collider *Phys. Rev. Lett.* **116**, 15 (2016).
25. H. Bartolomei *et al.* Fractional statistics in anyon collisions. *Science* **368**, 6487 (2020).
26. A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory* (World Scientific, 2005).

Одержано 20.05.20

B.Yu. Sobko

RELATIONSHIP BETWEEN
THE PARAMETERS OF THE SECOND VIRIAL
COEFFICIENT OF NON-ABELIAN ANYONS
AND THE TWO-PARAMETRIC
FRACTIONAL STATISTICS

A relationship between the parameters of the second virial coefficient for the system of non-Abelian anyons and two-parametric modifications of the Haldane–Wu and Polychronakos fractional statistics has been demonstrated. Parameters that can approximately describe non-Abelian anyons using the indicated statistics types are calculated. The limit at which the nonadditivity/incompleteness parameter q tends to unity is considered.

Keywords: virial coefficient, non-Abelian anyons, non-additive/incomplete two-parametric statistics, Haldane–Wu fractional statistics, Polychronakos fractional statistics.