О.О. ВАХНЕНКО

Відділ теорії нелінійних процесів в конденсованих середовищах
Інститут теоретичної фізики Національної академії наук України
(Вул. Метрологічна 14-Б, Київ, 03680-UA, Україна; e-mail: vakhnenko@bitp.kiev.ua)

УДК 539

НАПІВДИСКРЕТНА ІНТЕҐРОВНА НЕЛІНІЙНА ШРЬОДІНҐЕРОВА СИСТЕМА З ФОНОВО-КЕРОВАНОЮ МІЖВУЗЛОВОЮ РЕЗОНАНСНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Ми підсумовуємо найхарактерніші властивості напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової (Schrödinger) системи з параметрами міжвузлового резонансного зв'язку керованими фоновими значеннями допоміжних полів. Показано, що система є інтеґровною в сенсі Лакса (Lax) і, як наслідок, уможливлює побудову своїх солітонних розв'язків в рамках належно параметризованої процедури одягання на основі перетворення Дарбу (Darboux). З іншого боку, інтеґровність системи породжує нескінченну ієрархію локальних законів збереження, декотрі з яких знайдено явно із застосуванням узагальненого рекурсивного підходу. Система складається з двох основних динамічних підсистем та однієї супутньої (допоміжної) підсистеми і допускає Гамільтонове (Hamilton) формулювання, супроводжуване доволі нестандартною Пуассоновою (Poisson) структурою. Ненульовий фоновий рівень супутніх полів опосередковує появу додаткового типу міжвузлового резонансного зв'язку, внаслідок чого просторове впорядкування вузлів розміщеня основних польових збуджень уособлює найпростішу драбинчасту стьожку трикутної ґратки. Підлаштовуючи керівного фонового параметра, ми маємо змогу перемикати динаміку системи між двома суттєво відмінними режимами, розділеними критичною точкою. Критичність динаміки системи відносно фонового параметра проявляється як опосередковано в рамках допоміжної лінійної спектральної задачі, так і безпосередньо в поведінці самих нелінійних динамічних рівнянь. Фізичний підтекст критичности динаміки системи стає ясним після досить витонченої процедури канонізації основних польових змінних. Наразі існує два рівноправні варіанти стандартизації польових змінних досліджуваної нелінійної динамічної системи. Кожен з варіантів є реалізовним у формі двох нееквівалентних канонічних підсистем. Порушена симетрія між канонічними підсистемами є запорукою ефекту зміни природи збуджених станів при переході через критичну точку. Отже, в докритичній області система обумовлює світлі збудження в обох підсистемах, тоді як в надкритичній області одна із підсистем перетворюється на підсистему з темними збудженнями.

К л ю ч о в і с л о в а: нелінійна ґратка; інтеґровна система; солітон; закони збереження; порушення симетрії; канонічні польові змінні.

1. Вступ та рівняння нелінійної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки з двома типами міжвузлової резонансної взаємодії

Напівдискретні інтеґровні нелінійні Шрьодінґерові (Schrödinger) системи на одновимірних або квазіодновимірних ґратках [1–5, 24, 53, 57, 58, 74] відіграють значну роль в моделюванні широкого кола явищ з різних галузей фізики, позаяк вони можуть стати ключем до зрозуміння, на який тип нелінійних збуджень слід сподіватися, розглядаючи конкретні фізичні ситуації. Достатньо зауважити, що концепція нелінійних збуджень, пов'язаних з тією чи іншою моделлю нелінійного шрьодінґерівського типу, є досить плідною для дослідження нелінійних ефектів в дискретних електричних передавальних мережах [37], моделювання процесів перенесення енергії і заряду в макромолеку-

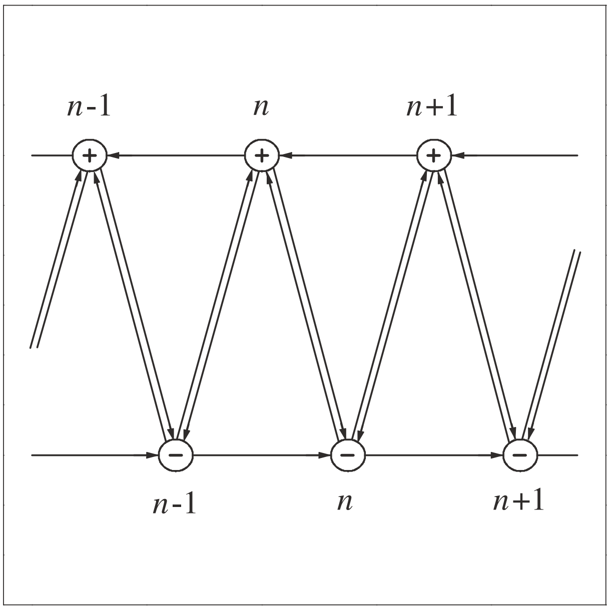

Рис. 1. Фрагмент двоніжкової драбинчастої ґратки-носія для напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками (1.1)–(1.6). Кружечки маркують місцезнаходження вузлів драбинчастої ґратки. Похилі стрілки вказують на первинні резонансні зв'язки (формалізовані параметрами α чи β) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Горизонтальні стрілки вказують на складові резонансні зв'язки (формалізовані параметрами $-\alpha\nu$ чи $-\beta\mu$) між основними польовими збудженнями на сусідніх вузлах, належних до певного ланцюжка драбинчастої ґратки. Тут $\nu = \lim_{|n|\to\infty} \nu(n)$ та $\mu = \lim_{|n|\to\infty} \mu(n)$

лах солітоноподібними збудженнями [9,18,19,48], а також для теоретичного трактування експериментально спостережуваних розподілах світла в перерізах зв'язаних оптичних волокнин [14, 23].

Виходячи з цього, напівдискретна інтеґровна нелінійна Шрьодінґерова (Schrödinger) система з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками [63, 67, 68] може мати значні фізичні застосування в якості багатокомпонентної системи з двома типами вільних параметрів зв'язку, що зумовлюють досить незвичні властивості [69, 70], і системи, чия ґраткова структура-носій є близько спорідненою зі структурою нанотрубки типу (1,1) на основі бору [36], що належить до нового класу низьковимірних синтетичних матеріалів, відомих як наностьожки [26, 31, 42]. У цьому огляді ми розглядаємо найрепрезентативніші результати досліджень такої напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи.

Напівдискретна нелінійна Шрьодінґерова система з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками (яку можна розглядати також як інтеґровну нелінійну Шрьодінґерову систему на стьожці трикутної ґратки), записана в термінах двох пар основних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$ і однієї пари допоміжних польових змінних $\mu(n)$, $\nu(n)$, має вигляд [63, 67, 68]

$$\begin{aligned}
&+\ \mathrm{i}\dot{q}_+(n) + \beta q_-(n-1)[1 + q_+(n)r_+(n)] + \\
&+\ \alpha q_+(n+1)[q_+(n)r_-(n) - \nu(n)] + \\
&+\ \alpha\,[q_-(n) + q_+(n)\mu(n)] = 0, \qquad (1.1)\\
&-\ \mathrm{i}\dot{r}_+(n) + \alpha r_-(n-1)[1 + r_+(n)q_+(n)] + \\
&+\ \beta r_+(n+1)[r_+(n)q_-(n) - \mu(n)] + \\
&+\ \beta\,[r_-(n) + r_+(n)\nu(n)] = 0, \qquad (1.2)\\
&+\ \mathrm{i}\dot{q}_-(n) + \alpha q_+(n+1)[1 + q_-(n)r_-(n)] + \\
&+\ \beta q_-(n-1)[q_-(n)r_+(n) - \mu(n)] + \\
&+\ \beta\,[q_+(n) + q_-(n)\nu(n)] = 0, \qquad (1.3)\\
&-\ \mathrm{i}\dot{r}_-(n) + \beta r_+(n+1)[1 + r_-(n)q_-(n)] + \\
&+\ \alpha r_-(n-1)[r_-(n)q_+(n) - \nu(n)] + \\
&+\ \alpha\,[r_+(n) + r_-(n)\mu(n)] = 0, \qquad (1.4)\\
&+\ \mathrm{i}\dot{\mu}(n) + \alpha q_+(n+1)[r_+(n) + r_-(n)\mu(n)] + \\
&+\ \beta\,[q_+(n)r_+(n) - q_-(n)r_-(n)] - \\
&-\ \alpha r_-(n-1)[q_-(n) + q_+(n)\mu(n)] = 0, \qquad (1.5)\\
&-\ \mathrm{i}\dot{\nu}(n) + \beta r_+(n+1)[q_+(n) + q_-(n)\nu(n)] + \\
&+\ \alpha\,[r_+(n)q_+(n) - r_-(n)q_-(n)] - \\
&-\ \beta q_-(n-1)[r_-(n) + r_+(n)\nu(n)] = 0. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Тут крапка над польовими функціями відповідає за диференціювання за часом τ, тоді як часозалежні параметри α і β описують первинний резонансний зв'язок між польовими змінними на сусідніх вузлах, належних до протилежних ланцюжків драбинчастої ґратки. Довільність часових залежностей цих параметрів обмежено лише загальною вимогою їхнього комплексного спряження $\beta^* = \alpha$. Польові змінні $q_+(n)$ і $r_+(n)$ (з $r_+^*(n) = q_+(n)$) наближено характеризують амплітуди ймовірности знайти n-тий вузол на верхньому (плюсовому) ланцюжку драбинчастої ґратки в стані збудження. Аналогічно, польові змінні $q_-(n)$ і $r_-(n)$ (з $r_-^*(n) = q_-(n)$) наближено характеризують амплітуди ймовірности знайти n-тий вузол на нижньому (мінусовому) ланцюжку драбинчастої ґратки в стані збудження. Ці дві пари змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $q_-(n)$, $r_-(n)$ складають основний набір динамічних полів на нескінченно довгій ($-\infty < n < +\infty$) драбинчастій ґратці із зиґзаґоподібним упорядкованням щаблів. При цьому дискретна просторова координата n позначає порядковий номер елементарної комірки ґратки, тоді як індекси + та − слугують аби розрізняти два різновиди вузлів в тій самій елементарній комірці. Іншими словами, позначки + та − слід віднести до двох відмінних ланцюжків (ніжок) драбинчастої ґратки. Навпаки, змінні $\mu(n)$ і $\nu(n)$ (з $\nu^*(n) = \mu(n)$) постають як супутній набір полів, оскільки їх можна виключити із розгляду, використовуючи так звані природні в'язі

$$\frac{\mu(n) - q_-(n)r_+(n)}{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu\nu}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\nu(n) - q_+(n)r_-(n)}{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)} = \frac{\nu}{1 + \mu\nu}, \tag{1.8}$$

продиктовані самою структурою системи рівнянь (1.1)–(1.6) через сукупність найнижчих локальних законів збереження (наведених в розділі 7). Принаймні варто пам'ятати, що величини $\mu(n)$ і $\nu(n)$ належить розглядати як функції від основних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$, і що вони не відіграють незалежної ролі в динаміці системи. Що ж стосується резонансного зв'язку між сусідніми вузлами, належними до того самого ланцюжка драбинчастої ґратки, то він виявляється ненульовим за умови, що часонезалежні граничні значення μ і ν супутніх полів $\mu(n)$ і $\nu(n)$ на обох просторових нескінченностях $|n| \to \infty$ є відмінними від нуля. В результаті параметри зв'язку, відповідальні за повздовжню взаємодію, виникають як істотно складові параметри, що дорівнюють $-\alpha\nu$ і $-\beta\mu$. Під терміном "міжвузловий резонансний зв'язок", запозиченим з теорії молекулярних (малорадіусних) екситонів [17], мається на увазі недисипативний (когерентний) зв'язок, що уособлює лінійну частину взаємодії між збудженнями основних полів. Прийняті симетрії між польовими змінними, доповнені прийнятими симетріями між параметрами зв'язку, конкретизують розглядувану систему (1.1)–(1.6) як систему з нелінійностями притягувального різновиду.

Просторову структуру вузлів ґратки і міжвузлових резонансних зв'язків, стосовну до нашої системи (1.1)–(1.6), візуалізовано на рисунку 1 як двостоякову драбинчасту ґратку, яку, відповідно до сучасної термінології з наностьожок [22], можна розглядати як найпростішу стьожку трикутної ґратки з лінійними краями. На загал квазіодновимірність того чи іншого ґратчастого утворення вважають обов'язковою передумовою, сприятливою для її фізичних застосувань, оскільки відомо, що вже квазіодновимірність (на відміну від цілковитої одновимірности) реальної макромолекулярної ґратчастої структури (взагалі будь-якої ґратчастої структури, розглядуваної в просторово мікроскопічному масштабі) є неодмінним чинником для термодинамічної стійкости структури [79]. На цю важливу обставину неодноразово наголошував академік Олександр Сергійович Давидов. З іншого боку, саме завдяки драбинчастій геометрії своєї ґратчастої структури-носія досліджувана система (1.1)–(1.6) (коли йдеться про електрично заряджені збудження) набуває здатности відчувати дію зовнішнього магнетного поля в термінах магнетних потоків, що пронизують елементарні (трикутні) клаптики ґратчастої стьожки і моделюються фазами комплекснозначних параметрів зв'язку, потрактованих як фази Пайєрлса [45, 58, 64].

2. Інтеґровність системи в Лаксовому сенсі [63, 67, 68]

Вважають, що нелінійна еволюційна система на одновимірній або квазіодновимірній ґратці є інтеґровною в Лаксовому (Lax) сенсі [44], якщо вона допускає напівдискретне представлення нульової кривини [50]

$$\dot{L}(n|z) = A(n+1|z)L(n|z) - L(n|z)A(n|z) \tag{2.1}$$

в термінах деяких допоміжних операторів $L(n|z)$ і $A(n|z)$ з часонезалежним компекснозначним спектральним параметром z. Зазвичай оператори $L(n|z)$ та $A(n|z)$ називають спектральним оператором та еволюційним оператором, відповідно.

Інтеґровність напівдискретної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками (1.1)–(1.6) знаходить своє природнє підтвердження в будь-якому з двох відомих виборів допоміжних операторів. Спочатку її було встановлено шляхом пошуку операторів $L(n|z)$ і $A(n|z)$ у вигляді наступних 4×4 квадратових матриць [63]

$$L(n|z)=\begin{pmatrix} z^2 & g_{11}(n) & f_{12}(n)z & g_{12}(n)z^{-1}\\ g_{11}(n) & z^2 & g_{12}(n)z^{-1} & f_{12}(n)z\\ g_{21}(n)z^{-1} & f_{21}(n)z & z^{-2} & f_{22}(n)\\ f_{21}(n)z & g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n) & z^{-2}\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

та

$$A(n|z)=\begin{pmatrix} b_{11}(n)z^2 & c_{11}(n) & b_{12}(n)z & c_{12}(n)z^{-1}\\ c_{11}(n) & b_{11}(n)z^2 & c_{12}(n)z^{-1} & b_{12}(n)z\\ c_{21}(n)z^{-1} & b_{21}(n)z & c_{22}(n)z^{-2} & b_{22}(n)\\ b_{21}(n)z & c_{21}(n)z^{-1} & b_{22}(n) & c_{22}(n)z^{-2}\end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Однак, пізніше інтеґровність системи було підтверджено, спираючись на простіші 2×2 квадратові матриці [67, 68],

$$L(n|z)=\begin{pmatrix} z^2+g_{11}(n) & f_{12}(n)z+g_{12}(n)z^{-1}\\ f_{21}(n)z+g_{21}(n)z^{-1} & f_{22}(n)+z^{-2}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

та

$$A(n|z)=\begin{pmatrix} b_{11}(n)z^2+c_{11}(n) & b_{12}(n)z+c_{12}(n)z^{-1}\\ b_{21}(n)z+c_{21}(n)z^{-1} & b_{22}(n)+c_{22}(n)z^{-2}\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Між двома вищезазначеними підходами існує взаємно однозначна відповідність, оскільки, незалежно від прийнятого вибору допоміжних матриць (2.2) та (2.3) або (2.4) та (2.5), із співвідношення нульової кривини (2.1) випливає один і той самий загальний набір інтеґровних нелінійних еволюційних рівнянь [68]

$$\begin{aligned}\dot g_{11}(n) &= c_{11}(n+1)g_{11}(n)+b_{12}(n+1)g_{21}(n)+c_{12}(n+1)f_{21}(n)-\\ &- g_{11}(n)c_{11}(n)-f_{12}(n)c_{21}(n)-g_{12}(n)b_{21}(n), \qquad (2.6)\\ \dot f_{12}(n) &= b_{11}(n+1)g_{12}(n)+c_{11}(n+1)f_{12}(n)+b_{12}(n+1)f_{22}(n)-\\ &- c_{12}(n)-g_{11}(n)b_{12}(n)-f_{12}(n)b_{22}(n), \qquad (2.7)\\ \dot g_{12}(n) &= c_{11}(n+1)g_{12}(n)+b_{12}(n+1)+c_{12}(n+1)f_{22}(n)-\\ &- g_{11}(n)c_{12}(n)-f_{12}(n)c_{22}(n)-g_{12}(n)b_{22}(n), \qquad (2.8)\\ \dot f_{22}(n) &= b_{21}(n+1)g_{12}(n)+c_{21}(n+1)f_{12}(n)+b_{22}(n+1)f_{22}(n)-\\ &- f_{21}(n)c_{12}(n)-g_{21}(n)b_{12}(n)-f_{22}(n)b_{22}(n), \qquad (2.9)\\ \dot g_{21}(n) &= c_{21}(n+1)g_{11}(n)+b_{22}(n+1)g_{21}(n)+c_{22}(n+1)f_{21}(n)-\\ &- g_{21}(n)c_{11}(n)-f_{22}(n)c_{21}(n)-b_{21}(n), \qquad (2.10)\\ \dot f_{21}(n) &= b_{21}(n+1)g_{11}(n)+c_{21}(n+1)+b_{22}(n+1)f_{21}(n)-\\ &- f_{21}(n)c_{11}(n)-g_{21}(n)b_{11}(n)-f_{22}(n)b_{21}(n) \qquad (2.11)\end{aligned}$$

з функціями $b_{11}(n)$, $c_{11}(n)$, $b_{12}(n)$, $c_{12}(n)$ та $c_{22}(n)$, $b_{22}(n)$, $c_{21}(n)$, $b_{21}(n)$, заданими формулами

$$b_{11}(n)=b_{11}, \tag{2.12}$$

$$c_{11}(n)=c_{11}-b_{11}f_{12}(n)f_{21}(n-1), \tag{2.13}$$

$$b_{12}(n)=b_{11}f_{12}(n), \tag{2.14}$$

$$c_{12}(n)=g_{12}(n-1)c_{22}, \tag{2.15}$$

$$c_{22}(n)=c_{22}, \tag{2.16}$$

$$b_{22}(n)=b_{22}-c_{22}g_{21}(n)g_{12}(n-1), \tag{2.17}$$

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. Огляди. 2017. Т. 12, № 1

$$c_{21}(n) = c_{22}g_{21}(n), \tag{2.18}$$

$$b_{21}(n) = f_{21}(n-1)b_{11}. \tag{2.19}$$

Тут функції $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$ і $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ слід розуміти як прототипи польових змінних, а координатно-незалежні параметри b_{11}, c_{11} і c_{22}, b_{22} можна вважати довільними функціями часу τ.

Загальна інтеґровна система (2.6)–(2.19) допускає щонайменше два типи комплекснозначних редукцій [68] і два типи дійснозначних редукцій [68]. Зокрема, редукція [67, 68]

$$g_{11}(n) = \mu(n) = \nu^*(n), \tag{2.20}$$

$$f_{12}(n) = +q_+(n) = +r_+^*(n), \tag{2.21}$$

$$g_{12}(n) = -q_-(n) = -r_-^*(n), \tag{2.22}$$

$$f_{22}(n) = \nu(n) = \mu^*(n), \tag{2.23}$$

$$g_{21}(n) = -r_+(n) = -q_+^*(n), \tag{2.24}$$

$$f_{21}(n) = +r_-(n) = +q_-^*(n), \tag{2.25}$$

$$b_{11} = -\mathrm{i}\alpha = -\mathrm{i}\beta^*, \tag{2.26}$$

$$c_{11} = 0, \tag{2.27}$$

$$c_{22} = +\mathrm{i}\beta = +\mathrm{i}\alpha^*, \tag{2.28}$$

$$b_{22} = 0 \tag{2.29}$$

відтворює багатокомпонентну напівдискретну інтеґровну Шрьодінґерову систему (1.1)–(1.6), яка і є головним предметом нашого дослідження.

Добре відомо, що особливості фактичного інтеґрування будь-якої окремої інтеґровної нелінійної системи в рамках оберненої задачі розсіяння обумовлені порядком її допоміжної спектральної задачі [11, 12, 73]. Так, за Кодрі (Caudrey) [11, 12] порядок допоміжної спектральної задачі визначається кількістю *відмінних* власних значень $\eta_j(z)$ граничної спектральної матриці $L(z)$ (означеної як $L(z) = \lim_{n\to-\infty} L(n|z)$ або як $L(z) = \lim_{n\to+\infty} L(n|z)$), *тобто* кількістю *відмінних* розв'язків алгебраїчного рівняння

$$\det[L(z) - \eta I\,] = 0, \tag{2.30}$$

де I – одинична матриця того самого рангу, що й гранична (на загал невироджена) спектральна матриця $L(z)$. Отже, порядок допоміжної спектральної задачі не може перевищувати рангу граничної спектральної матриці і залежить від самої структури такої матриці, яка істотно чутлива до вибору граничних умов для польових змінних. Наприклад, будь-яку допоміжну спектральну задачу, пов'язану з тією чи іншою найбільш затребуваною багатокомпонентною напівдискретною інтеґровною нелінійною Шрьодінґеровою системою за нульових граничних умов [3, 24, 53, 57, 58], можна трактувати як задачу другого порядку, незважаючи на певне матричне узагальнення засадничої спектральної задачі Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) [1, 2]. На противагу, порядок допоміжної спектральної задачі, пов'язаної з деякою багатокомпонентною напівдискретною інтеґровною нелінійною Шрьодінґеровою системою за ненульових граничних умов [7, 8], зазвичай є вищий порівняно з її двійником, взятим за нульових граничних умов.

Загалом, коли порядок алгебраїчного рівняння (2.30) зростає, відповідні аналітичні розв'язки $\eta_i(z)$ стають громіздкими (для рівняння третього степеня), неосяжними (для рівняння четвертого порядку) і навіть неможливими (для рівнянь вищого порядку). Отже, за винятком деяких окремих випадків, теорія солітонів змушена насправді мати справу з допоміжними спектральними задачами низького порядку. З цього погляду важливо наголосити, що напівдискретна інтеґровна нелінійна Шрьодінґерова система з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками (1.1)–(1.6) може бути асоційована не лише з допоміжною спектральною задачею четвертого порядку [63], що характеризується чотирма *відмінними* (втім явно заданими) власними значеннями,

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu, \tag{2.31}$$

$$\eta_2(z) = z^{-2} + \nu, \tag{2.32}$$

$$\eta_3(z) = z^2 - \mu, \tag{2.33}$$

$$\eta_4(z) = z^{-2} - \nu, \tag{2.34}$$

але й з допоміжною спектральною задачею другого порядку [67, 68], що характеризується лише двома *відмінними* власними значеннями

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu, \tag{2.35}$$

$$\eta_2(z) = z^{-2} + \nu. \tag{2.36}$$

3. Перетворення Дарбу і Беклунда як основа інтеґрування напівдискретної еволюційної нелінійної системи методом одягання [67, 68]

Серед загальних методів пошуку солітонних розв'язків інтеґровної нелінійної системи, підхід, що ґрунтується на перетворенні Дарбу (Darboux), видається найбільш виграшним завдяки його універсальності і порівняній простоті. Перетворення Дарбу (Darboux) у застосуванні до напівдискретних інтеґровних систем ввели в теорію солітонів Матвєєв і Салль [39, 40]. Їхню версію методу перетворення Дарбу було успішно використано при розв'язанні дискретизованих рівнянь Сіліна–Тихончука [34, 35], що описують взаємодію Ленґмюрових (Langmuir) плазмових хвиль у випадку сильного згасання йоно-акустичної хвилі [49]. Іншу версію підходу перетворення Дарбу запропонували Нойґебауер (Neugebauer) і Майнель (Meinel) [43]. Згодом цю версію було впроваджено для дослідження дискретизованої системи Максвелла–Блоха (Maxwell–Bloch) [10, 46].

Критичний розгляд наявної літератури з методу перетворення Дарбу [6, 10, 13, 20, 25, 34, 35, 39–41, 43, 46, 76, 77] надав нам змогу зібрати основні ідеї, достатні аби побудувати явні розв'язки будь-якої редукованої інтеґровної системи, закодованої в запропонованій загальній системі (2.6)–(2.19). Заради універсальности ми викладемо головні пункти доречної процедури одягання Дарбу в термінах прототипових польових змінних $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$ та $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ [67, 68].

На початку нагадаємо, що рівняння нульової кривини (2.1) випливає з умови сумісности між двома допоміжними матричними рівняннями

$$X(n+1|z) = L(n|z)X(n|z) \tag{3.1}$$

і

$$\dot{X}(n|z) = A(n|z)X(n|z), \tag{3.2}$$

що мають назву допоміжної лінійної задачі. Тут через $X(n|z)$ позначено матричну функцію, детермінант якої $\det X(n|z)$ дорівнює нулеві лише в обмеженій кількості точок на площині комплексного спектрального параметра z. Надалі ми можемо беззастережно вважати матриці $L(n|z)$ і $A(n|z)$ квадратовими 2×2 матрицями, посилаючись за необхідности на їхні явні представлення (2.4) і (2.5). Отже і матрицю $X(n|z)$ також слід прийняти за квадратову 2×2 матрицю.

Враховуючи, що прототипові польові змінні $g_{11}(n)$, $f_{12}(n)$, $g_{12}(n)$, $f_{22}(n)$, $g_{21}(n)$, $f_{21}(n)$ повністю визначають спектральний $L(n|z)$ і еволюційний $A(n|z)$ оператори, існує можливість розрізняти два відмінні розв'язки $g^-_{11}(n)$, $f^-_{12}(n)$, $g^-_{12}(n)$, $f^-_{22}(n)$, $g^-_{21}(n)$, $f^-_{21}(n)$ і $g^+_{11}(n)$, $f^+_{12}(n)$, $g^+_{12}(n)$, $f^+_{22}(n)$, $g^+_{21}(n)$, $f^+_{21}(n)$ загальної інтеґровної нелінійної системи (2.6)–(2.19) за допомоги двох наборів матриць $L^-(n|z)$, $A^-(n|z)$ і $L^+(n|z)$, $A^+(n|z)$, відповідно. Отже формально ми в змозі взяти до розгляду два окремі уособлення базового рівняння нульової кривини (2.1), а саме мінус-позначене рівняння нульової кривини

$$\dot{L}^-(n|z) = A^-(n+1|z)L^-(n|z) - L^-(n|z)A^-(n|z) \tag{3.3}$$

та плюс-позначене рівняння нульової кривини

$$\dot{L}^+(n|z) = A^+(n+1|z)L^+(n|z) - L^+(n|z)A^+(n|z). \tag{3.4}$$

З огляду на цю домовленість немає жодних принципових перепон аби залучити мінус-позначену допоміжну лінійну задачу

$$X^-(n+1|z) = L^-(n|z)X^-(n|z), \tag{3.5}$$
$$\dot{X}^-(n|z) = A^-(n|z)X^-(n|z), \tag{3.6}$$

пов'язану з матрицями $L^-(n|z)$, $A^-(n|z)$, $X^-(n|z)$, та плюс-позначену допоміжну лінійну задачу

$$X^+(n+1|z) = L^+(n|z)X^+(n|z), \tag{3.7}$$
$$\dot{X}^+(n|z) = A^+(n|z)X^+(n|z), \tag{3.8}$$

пов'язану з матрицями $L^+(n|z)$, $A^+(n|z)$, $X^+(n|z)$, до складу консолідованої схеми перетворення Дарбу.

За означенням [13] перетворення Дарбу

$$X^+(n|z) = S(n|z)X^-(n|z) \tag{3.9}$$

пов'язує розв'язки $X^-(n|z)$ і $X^+(n|z)$ мінус-позначеної (3.5), (3.6) та плюс-позначеної (3.7), (3.8) допоміжних лінійних задач за допомоги матриці Дарбу $S(n|z)$. Матриця Дарбу $S(n|z)$ мусить підпорядковуватись системі матричних рівнянь

$$S(n+1|z)L^-(n|z) = L^+(n|z)S(n|z), \tag{3.10}$$

$$\dot{S}(n|z) = A^{+}(n|z)S(n|z) - S(n|z)A^{-}(n|z), \tag{3.11}$$

що слугують за просторову (3.10) та часову (3.11) умови сумісности між мінус-позначеною (3.5), (3.6) та плюс-позначеною (3.7), (3.8) допоміжними лінійними задачами. Варто зауважити, що ці умови (3.10), (3.11) разом з мінус-позначеним рівнянням нульової кривини (3.3) приводять до плюс-позначеного рівняння нульової кривини (3.4). Навпаки, часову умову сумісности (3.11) слушно розглядати як прямий наслідок просторової умови сумісности (3.10), якщо як мінус-позначене (3.3), так і плюс-позначене (3.4) рівняння нульової кривини вважати задовільненими.

Відповідно до мнемонічного правила, згадуваного Кузнєцовим і Скляніним [33], анзаца для матриці Дарбу $S(n|z)$ варто вибрати у формі, аналогічній до форми спектральної матриці $L(n|z)$. Іншими словами, ми маємо припустити, що матриця Дарбу задається виразом

$$S(n|z) = \\ = \begin{pmatrix} z^2 + u_{11}(n) & t_{12}(n)z + u_{12}(n)z^{-1} \\ t_{21}(n)z + u_{21}(n)z^{-1} & t_{22}(n) + z^{-2} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Цей анзац (3.12) приписує правдоподібно найпростіший варіант матриці Дарбу, доцільний для нашого завдання. Його покликанням, як очікується, є утворити один додатковий солітон в наступному (плюс-позначеному) розв'язку нелінійної системи порівняно з попереднім (мінус-позначеним) розв'язком. Намір же утворити заразом кілька солітонів вимагає вибору матриці Дарбу, узагальненої до виду, що містить спектральний параметр з такими самими показниками степеня, як і добуток відповідної кількости спектральних матриць.

Використовуючи прийнятий анзац (3.12) для матриці Дарбу, просторову умову сумісности (3.10) можна переписати у вигляді дванадцяти співвідношень між функціями, що конкретизують матрицю Дарбу $S(n|z)$, і функціями, залученими до матриць $L^{-}(n|z)$ та $L^{+}(n|z)$. Відповідні вирази мають вигляд

$$t_{12}(n) = f_{12}^{-}(n), \tag{3.13}$$

$$u_{21}(n) = g_{21}^{-}(n), \tag{3.14}$$

$$t_{21}(n+1) = f_{21}^{+}(n), \tag{3.15}$$

$$u_{12}(n+1) = g_{12}^{+}(n) \tag{3.16}$$

та

$$g_{11}^{-}(n) + t_{12}(n+1)f_{21}^{-}(n) + u_{11}(n+1) = g_{11}^{+}(n) + f_{12}^{+}(n)t_{21}(n) + u_{11}(n), \tag{3.17}$$

$$u_{11}(n+1)g_{11}^{-}(n) + u_{12}(n+1)f_{21}^{-}(n) + t_{12}(n+1)g_{21}^{-}(n) = g_{11}^{+}(n)u_{11}(n) + f_{12}^{+}(n)u_{21}(n) + g_{12}^{+}(n)t_{21}(n), \tag{3.18}$$

$$u_{11}(n+1)f_{12}^{-}(n) + t_{12}(n+1)f_{22}^{-}(n) + g_{12}^{-}(n) = g_{11}^{+}(n)t_{12}(n) + f_{12}^{+}(n)t_{22}(n) + u_{12}(n), \tag{3.19}$$

$$u_{11}(n+1)g_{12}^{-}(n) + t_{12}(n+1) + u_{12}(n+1)f_{22}^{-}(n) = g_{11}^{+}(n)u_{12}(n) + f_{12}^{+}(n) + g_{12}^{+}(n)t_{22}(n), \tag{3.20}$$

$$f_{22}^{-}(n) + u_{21}(n+1)g_{12}^{-}(n) + t_{22}(n+1) = f_{22}^{+}(n) + g_{21}^{+}(n)u_{12}(n) + t_{22}(n), \tag{3.21}$$

$$t_{22}(n+1)f_{22}^{-}(n) + t_{21}(n+1)g_{12}^{-}(n) + u_{21}(n+1)f_{12}^{-}(n) = f_{22}^{+}(n)t_{22}(n) + g_{21}^{+}(n)t_{12}(n) + f_{21}^{+}(n)u_{12}(n), \tag{3.22}$$

$$t_{22}(n+1)g_{21}^{-}(n) + u_{21}(n+1)g_{11}^{-}(n) + f_{21}^{-}(n) = f_{22}^{+}(n)u_{21}(n) + g_{21}^{+}(n)u_{11}(n) + t_{21}(n), \tag{3.23}$$

$$t_{22}(n+1)f_{21}^{-}(n) + u_{21}(n+1) + t_{21}(n+1)g_{11}^{-}(n) = f_{22}^{+}(n)t_{21}(n) + g_{21}^{+}(n) + f_{21}^{+}(n)u_{11}(n). \tag{3.24}$$

Виникає питання, яким чином застосувати рівняння (3.13)–(3.24) аби одержати новий розв'язок загальної нелінійної системи, спираючись на попередній. Цілком очевидний і разом з тим непрактичний спосіб – це вилучити всі посередницькі функції Дарбу $u_{11}(n)$, $t_{12}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $u_{21}(n)$, $t_{21}(n)$ і одержати шість рівнянь, що пов'язують шість функцій $g_{11}^{+}(n)$, $f_{12}^{+}(n)$, $g_{12}^{+}(n)$, $f_{22}^{-}(n)$, $g_{21}^{+}(n)$, $f_{21}^{+}(n)$ нового розв'язку із шістьома функціями $g_{11}^{-}(n)$, $f_{12}^{-}(n)$, $g_{12}^{-}(n)$, $f_{22}^{-}(n)$, $g_{21}^{-}(n)$, $f_{21}^{-}(n)$ припустимо відомого попереднього розв'язку. За означенням ці шість рівнянь встановлюють перетворення Беклунда (Bäcklund) між попереднім і новим розв'язками. Позаяк вислідні формули для перетворення Беклунда (Bäcklund) по суті є занадто громіздкі, то ми їх тут не подаємо. Однак, сам факт їхнього існування надає упевнености в тому, що вихідні рівняння (3.13)–(3.24) слід розглядати як внутрішньо несуперечливий засіб у розбудові методу одягання Дарбу.

Засади методу одягання Дарбу полягають у відновлюванні функцій Дарбу, спираючись на певні загальні спектральні властивості ухваленого анзаца Дарбу, за посилки, що засівний розв'язок (представлений мінус-позначеними польовими функціями) нелінійної системи вже відомо заздалегідь. Після завершення цієї програми ґенерація нового (ужинкового) розв'язку (представленого мінус-позначеними польовими функціями) зводиться до розв'язку суто лінійних алгебраїчних рівнянь, вибраних належним чином з розгорненого запису (3.13)–(3.24) просторової умови сумісности (3.10). При найпростішому виборі матриці Дарбу (3.12) перші два рівняння (3.13) і (3.14) з розгорненого запису (3.13)–(3.24) явно показують, що лише чотири (а саме $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$) із шести функцій Дарбу здатні претендувати на дійсно наперед невідомі.

Аби досягти успіху в застосуванні методу одягання Дабру до нашої загальної нелінійної системи (2.6)–(2.19), необхідно проаналізувати згорнуте еволюційне рівняння

$$\frac{d}{d\tau}\ln[\det S(n|z)] = \mathrm{Sp}\,A^{+}(n|z) - \mathrm{Sp}\,A^{-}(n|z), \quad (3.25)$$

виведене з належно підготованої часової умови сумісности (3.11) внаслідок дії операції сліду. Заваживши зокрема, що комбінація $\mathrm{Sp}\,A^{+}(n|z) - \mathrm{Sp}\,A^{-}(n|z)$ не залежить від спектрального параметра z, ми здатні швидко з'ясувати, що величини

$$W_{+}(n) = t_{22}(n) - t_{21}(n)t_{12}(n), \quad (3.26)$$

$$W_{0}(n) = 1 + t_{22}(n)u_{11}(n) - t_{21}(n)u_{12}(n) - t_{12}(n)u_{21}(n), \quad (3.27)$$

$$W_{-}(n) = u_{11}(n) - u_{12}(n)u_{21}(n), \quad (3.28)$$

які входять до виразу

$$\det S(n|z) = W_{+}(n)z^{2} + W_{0}(n) + W_{-}(n)z^{-2}, \quad (3.29)$$

мають еволюціонувати у спосіб, що приводить до ланцюжка рівнянь

$$\frac{d}{d\tau}\ln W_{+}(n) = \frac{d}{d\tau}\ln W_{0}(n) = \frac{d}{d\tau}\ln W_{-}(n). \quad (3.30)$$

Як наслідок, функції $W_{+}(n)$, $W_{0}(n)$, $W_{-}(n)$ мусять відрізнятися лише незалежними від часу коефіцієнтами. До того ж, за умови однорідности простору ці часонезалежні коефіцієнти мають бути незалежними і від просторової координати. Відтак, формула (3.29) для детермінанта матриці Дарбу набуває форми

$$\det S(n|z) = \left(z^{2} + u_{11}\right)\left(z^{-2} + t_{22}\right)\frac{W_{0}(n)}{1 + u_{11}t_{22}}, \quad (3.31)$$

де параметри u_{11} і t_{22} постають незалежними як від часу, так і від кординати, тоді як функції $t_{12}(n)$, $u_{12}(n)$ і $u_{21}(n)$, $t_{21}(n)$ прийнято такими, що швидко спадають до нуля на обох просторових нескінченностях. Одержаний вираз (3.31) показує, що всі чотири ($r = 1, 2, 3, 4$) корені z_r рівняння $\det S(n|z) = 0$ є незалежними як від часу, так і від координати.

З огляду на очевидну тотожність $\det S(n|z_r) = 0$, з означення перетворення Дарбу (3.9) безпосередньо випливає рівняння $\det X^{+}(n|z_r) = 0$. Остання рівність означає, що

$$\sum_{k=1}^{2} X^{+}_{jk}(n|z_r)\varepsilon_k(z_r) = 0 \quad (3.32)$$

або ж детальніше

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} S_{ji}(n|z_r)X^{-}_{ik}(n|z_r)\varepsilon_k(z_r) = 0, \quad (3.33)$$

де $X^{+}_{jk}(n|z)$ і $S_{jk}(n|z)$ – матричні елементи матриць $X^{+}(n|z)$ і $S(n|z)$, відповідно. Тут всі вісім спектральних параметрів $\varepsilon_k(z_r)$ ($k = 1, 2$; $r = 1, 2, 3, 4$) змушені бути незалежними як від часу τ, так і від координати n. Це твердження має статус строго доведеної теореми.

Одержана формула (3.33) містить неоднорідну систему восьми лінійних алгебраїчних рівнянь ($j = 1, 2$; $r = 1, 2, 3, 4$), що уможливлює виразити невідомі функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ через *апріорі* відомі складові частини матриці Дарбу і розв'язок $X^{-}(n|z)$ мінус-позначеної допоміжної лінійної задачі (3.5) і (3.6), заразом беручи до уваги спектральні параметри $\varepsilon_k(z_r)$ і корені z_r. Своєю чергою, розв'язок $X^-(n|z)$ повністю визначається мінус-позначеним (засівним) розв'язком $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$ цікавої нам загальної нелінійної інтеґровної системи (2.6)–(2.19). Отже, у поєднанні з попередньо одержаними розгорненими формулами (3.13)–(3.24) для просторової умови сумісности (3.10) ми приходимо до замкненої процедури одягання Дарбу, що уможливлює зґенерувати новий розв'язок $g_{11}^+(n)$, $f_{12}^+(n)$, $g_{12}^+(n)$, $f_{22}^+(n)$, $g_{21}^+(n)$, $f_{21}^+(n)$ загальної нелінійної системи (2.6)–(2.19), виходячи з уже відомого розв'язку $g_{11}^-(n)$, $f_{12}^-(n)$, $g_{12}^-(n)$, $f_{22}^-(n)$, $g_{21}^-(n)$, $f_{21}^-(n)$.

Принагідно, варто зауважити, що спектральні коефіцієнти $\varepsilon_k(z_r)$ і корені z_r, які виникають в процедурі одягання Дарбу, відіграють таку саму роль, що й дискретні спектральні дані в методі оберненої задачі розсіяння [2, 12, 50, 52, 53, 61, 62, 65].

4. Симетрії дискретних спектральних даних $\varepsilon_k(z_r)$ і z_r, дотичні до нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [67, 68]

Розглядаючи багатокомпонентну нелінійну Шрьодінґерову систему з нелінійностями притягувального типу (1.1)–(1.6) і враховуючи попарне комплексне спряження її польових змінних (2.20)–(2.25) та її параметрів зв'язку (2.26)–(2.29), легко показати, що спектральна $L(n|z)$ і еволюційна $A(n|z)$ матриці (2.4) і (2.5) (з матрицею $A(n|z)$ (2.5), заданою формулами (2.12)–(2.19)), демонструють наступні співвідношення симетрії

$$\sigma_2[L(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = L(n|z), \tag{4.1}$$

$$\sigma_3[L(n|-z)]\sigma_3 = L(n|z) \tag{4.2}$$

і

$$\sigma_2[A(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = A(n|z), \tag{4.3}$$

$$\sigma_3[A(n|-z)]\sigma_3 = A(n|z), \tag{4.4}$$

де символи σ_2 і σ_3 позначають другу

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ +\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

і третю

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

матриці Паулі (Pauli). Як наслідок, аналогічні співвідношення симетрії

$$\sigma_2[X(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = X(n|z), \tag{4.7}$$

$$\sigma_3[X(n|-z)]\sigma_3 = X(n|z) \tag{4.8}$$

є чинні також і для матричної функції $X(n|z)$. Схожі властивості мусять справджуватись і для мінус-позначених та плюс-позначених варіантів усих трьох вищеінспектованих матриць, а також і для матриці Дарбу $S(n|z)$:

$$\sigma_2[S(n|1/z^*)]^*\sigma_2 = S(n|z), \tag{4.9}$$

$$\sigma_3[S(n|-z)]\sigma_3 = S(n|z). \tag{4.10}$$

Нижче ми перелічимо кілька найрепрезантативніших висновків з вищевстановлених співвідношень симетрії.

Зокрема ми маємо

$$t_{21}^*(n) = -u_{12}(n), \tag{4.11}$$

$$t_{22}^*(n) = +u_{11}(n), \tag{4.12}$$

$$t_{12}^*(n) = -u_{21}(n). \tag{4.13}$$

Можна показати, що ці формули обґрунтовують рівність $t_{22}^* = u_{11}$, що спонукає до наступних параметризацій

$$u_{11} = -\exp(+2\gamma + 2\mathrm{i}\varkappa), \tag{4.14}$$

$$t_{22} = -\exp(+2\gamma - 2\mathrm{i}\varkappa), \tag{4.15}$$

де γ і $\varkappa$ – дійсні параметри, незалежні від часу і координати. Тоді для коренів z_r рівняння $\det S(n|z) = 0$ (з $\det S(n|z)$, заданим формулою (3.31)) ми матимемо

$$z_1 = \exp(+\gamma + \mathrm{i}\varkappa) = -z_3, \tag{4.16}$$

$$z_2 = \exp(-\gamma + \mathrm{i}\varkappa) = -z_4. \tag{4.17}$$

Інші важливі властивості

$$\varepsilon_1(-z_r)/\varepsilon_2(-z_r) = -\varepsilon_1(+z_r)/\varepsilon_2(+z_r), \tag{4.18}$$

$$\varepsilon_2^*(z_2)/\varepsilon_1^*(z_2) = -\varepsilon_1(z_1)/\varepsilon_2(z_1), \tag{4.19}$$

$$\varepsilon_2^*(z_4)/\varepsilon_1^*(z_4) = -\varepsilon_1(z_3)/\varepsilon_2(z_3) \tag{4.20}$$

вказують на наступні параметризації

$$\varepsilon_2(z_2)/\varepsilon_1(z_2) = +\exp(+d + \mathrm{i}e) = -\varepsilon_2(z_4)/\varepsilon_1(z_4), \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_2(z_1)/\varepsilon_1(z_1) = -\exp(-d + \mathrm{i}e) = -\varepsilon_2(z_3)/\varepsilon_1(z_3) \tag{4.22}$$

з дійсними параметрами d і e, незалежними як від часу, так і від координати.

Аналіз усих наявних властивостей симетрії підштовхує до низки спрощень. Найважливішою з них є здатність скоротити наполовину кількість лінійних алгебраїчних рівнянь, закодованих у формулі (3.33), яка містить як відомі $t_{12}(n)$, $u_{21}(n)$, так і невідомі $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$, $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ функції Дарбу. Після цього число лінійних алгебраїчних рівнянь вже збігається з числом невідомих функцій функцій Дарбу, і спрощена система рівнянь стає легкорозв'язною.

5. Багатокомпонентний солітонний розв'язок для нелінійної Шрьодінґерової системи з нелінійностями притягувального типу [67, 68]

Покладаючись на результати попередніх двох розділів, побудуємо односолітонний розв'язок для нелінійної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки (1.1)–(1.6) за нелінійностей притягувального типу.

Для цього в якості засівного (мінус-позначеного) ми виберемо вакуумний розв'язок

$$f_{12}^-(n) = +q_+^-(n) = 0, \tag{5.1}$$
$$g_{12}^-(n) = -q_-^-(n) = 0, \tag{5.2}$$
$$g_{11}^-(n) = \mu^-(n) = \mu, \tag{5.3}$$
$$g_{21}^-(n) = -r_+^-(n) = 0, \tag{5.4}$$
$$f_{21}^-(n) = +r_-^-(n) = 0, \tag{5.5}$$
$$f_{22}^-(n) = \nu^-(n) = \nu. \tag{5.6}$$

Після цього мінус-позначені спектральна та еволюційна матриці стають незалежними від координатної змінної

$$L^-(n|z) = L^-(z), \tag{5.7}$$
$$A^-(n|z) = A^-(z), \tag{5.8}$$

тоді як спектральна матриця $L^-(z)$ виявляється незалежною ще й від часової змінної.

Як наслідок, мінус-позначене рівняння нульової кривини (3.3) спрощується до строгого співвідношення комутативности

$$A^-(z)L^-(z) = L^-(z)A^-(z), \tag{5.9}$$

яке вказує, що матриці

$$L^-(z) = \begin{pmatrix} z^2+\mu & 0 \\ 0 & \nu + z^{-2} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

і

$$A^-(z) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\alpha z^2 & 0 \\ 0 & +\mathrm{i}\beta z^{-2} \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

поділяють один і той же набір власних функцій

$$|\mathrm{x}_k^-(z)\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|\mathrm{x}_k^-(z)\rangle \\ \langle 2|\mathrm{x}_k^-(z)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

з індексом k, що пробігає значення 1 і 2, та величиною δ_{jk}, встановленою для дельта-символу Кронекера (Kronecker). Власні значення $\eta_k(z)$ та $\dot{\varphi}_k(z)$ матриць $L^-(z)$ і $A^-(z)$, відповідно, є такі

$$\eta_1(z) = z^2 + \mu, \tag{5.13}$$
$$\eta_2(z) = \nu + z^{-2} \tag{5.14}$$

і

$$\dot{\varphi}_1(z) = -\mathrm{i}\alpha z^2, \tag{5.15}$$
$$\dot{\varphi}_2(z) = +\mathrm{i}\beta z^{-2}. \tag{5.16}$$

Виявляється, що перші власні значення $\eta_1(z)$ і $\eta_2(z)$ збігаються з власними значеннями (2.35) і (2.36) граничного спектрального оператора $L(z)$, введеного в розділі 2. Цей факт підкреслює природжену властивість власних значень $\eta_j(z)$ бути нечутливими до вибору уподобаної схеми інтеґрування.

Тепер можна легко пересвідчитись, що компоненти $X_{jk}^-(n|z)$ розв'язку $X^-(n|z)$ мінус-позначеної допоміжної задачі (3.5) і (3.6) треба взяти у формі

$$X_{jk}^-(n|z) = \langle j|\mathrm{x}_k(z)\rangle[\eta_k(z)]^n \exp[\varphi_k(z)] \equiv$$
$$\equiv \delta_{jk}[\eta_k(z)]^n \exp[\varphi_k(z)] \tag{5.17}$$

з функціями $\varphi_k(z)$, визначеними виразами

$$\varphi_1(z) = -\mathrm{i}Az^2 + \mathrm{i}\psi, \tag{5.18}$$
$$\varphi_2(z) = +\mathrm{i}Bz^{-2} - \mathrm{i}\psi. \tag{5.19}$$

Тут ψ – дійсний сталий параметр, тоді як функції A і B є розв'язки звичайних диференційних рівнянь першого порядку

$$\dot{A} = \alpha \tag{5.20}$$

і

$$\dot{B} = \beta, \tag{5.21}$$

обмежені умовою комплексного спряження $B^* = A$.

Знаючи компоненти $X^-_{jk}(n|z)$ матричної функції $X^-(n|z)$, ми маємо знайти чотири шукані функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$ і $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$. Це завдання є здійсниме за допомоги розв'язування двох вкорочених неоднорідних систем рівнянь, залучених до застереження (3.33), яке обумовлює тотожності $\det S(n|z_r) = 0$ ($r = 1, 2, 3, 4$). Результати розрахунків є такі

$$u_{11}(n) = U_{11}(n)/U_{00}(n), \tag{5.22}$$

$$u_{12}(n) = U_{12}(n)/U_{00}(n) \tag{5.23}$$

і

$$t_{22}(n) = T_{22}(n)/T_{00}(n), \tag{5.24}$$

$$t_{21}(n) = T_{21}(n)/T_{00}(n), \tag{5.25}$$

де

$$U_{11}(n) = X^-_{11}(n|z_2)X^-_{22}(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_1(z_2)z_2^2/z_1 - X^-_{11}(n|z_1)X^-_{22}(n|z_2)\varepsilon_2(z_2)\varepsilon_1(z_1)z_1^2/z_2, \tag{5.26}$$

$$U_{12}(n) = X^-_{11}(n|z_1)X^-_{11}(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_1(z_1)[z_1^2 - z_2^2], \tag{5.27}$$

$$U_{00}(n) = X^-_{11}(n|z_1)X^-_{22}(n|z_2)\varepsilon_2(z_2)\varepsilon_1(z_1)/z_2 - X^-_{11}(n|z_2)X^-_{22}(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_1(z_2)/z_1 \tag{5.28}$$

і

$$T_{22}(n) = X^-_{22}(n|z_1)X^-_{11}(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_2(z_1)z_2/z_1^2 - X^-_{22}(n|z_2)X^-_{11}(n|z_1)\varepsilon_1(z_1)\varepsilon_2(z_2)z_1/z_2^2, \tag{5.29}$$

$$T_{21}(n) = X^-_{22}(n|z_2)X^-_{22}(n|z_1)\varepsilon_2(z_1)\varepsilon_2(z_2)[1/z_2^2 - 1/z_1^2], \tag{5.30}$$

$$T_{00}(n) = X^-_{22}(n|z_2)X^-_{11}(n|z_1)\varepsilon_1(z_1)\varepsilon_2(z_2)z_1 - X^-_{22}(n|z_1)X^-_{11}(n|z_2)\varepsilon_1(z_2)\varepsilon_2(z_1)z_2. \tag{5.31}$$

Позаяк функції Дарбу $u_{11}(n)$, $u_{12}(n)$ і $t_{22}(n)$, $t_{21}(n)$ вже знайдено, ми маємо підставити їх до останніх десяти рівнянь (3.15)–(3.24), виведених з просторової умови сумісности (3.10), і відродити всі шість функцій $q^+_+(n)$, $q^+_-(n)$, $\mu^+(n)$ і $r^+_+(n)$, $r^+_-(n)$, $\nu^+(n)$, долучених до односолітонного розв'язку. При проведенні вказаних розрахунків ми оперували лише з шістьома належним чином вибраними рівняннями, тоді як решта рівнянь знадобилася суто для перевірки одержаних результатів. Кінцеві формули для багатокомпонентного односолітонного розв'язку гласять

$$q^+_+(n) = +\sinh(2\gamma)\frac{\exp[+2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n - \xi - y) + \mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]}, \tag{5.32}$$

$$q^+_-(n) = -\sinh(2\gamma)\frac{\exp[+2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n + \xi - y) + \mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]}, \tag{5.33}$$

$$\mu^+(n) = \mu - \frac{\exp(+2\mathrm{i}\varkappa)\sinh(2\gamma)\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]} \tag{5.34}$$

і

$$r^+_+(n) = +\sinh(2\gamma)\frac{\exp[-2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n - \xi - y) - \mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]}, \tag{5.35}$$

$$r^+_-(n) = -\sinh(2\gamma)\frac{\exp[-2\mathrm{i}(\varkappa_+ + \varkappa_-)(n + \xi - y) - \mathrm{i}\chi]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]}, \tag{5.36}$$

$$\nu^+(n) = \nu - \frac{\exp(-2\mathrm{i}\varkappa)\sinh(2\gamma)\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - s - x)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n + s - x)]}. \tag{5.37}$$

Тут дві пари дійсних сталих параметрів γ_+, $\varkappa_+$ і γ_-, $\varkappa_-$ означено двома системами рівнянь

$$\exp(+2\gamma_+ + 2\mathrm{i}\varkappa_+) = \exp(+2\gamma + 2\mathrm{i}\varkappa) + \mu, \tag{5.38}$$

$$\exp(+2\gamma_+ - 2\mathrm{i}\varkappa_+) = \exp(+2\gamma - 2\mathrm{i}\varkappa) + \nu \tag{5.39}$$

і

$$\exp(-2\gamma_- + 2\mathrm{i}\varkappa_-) = \exp(-2\gamma + 2\mathrm{i}\varkappa) + \mu, \tag{5.40}$$

$$\exp(-2\gamma_- - 2\mathrm{i}\varkappa_-) = \exp(-2\gamma - 2\mathrm{i}\varkappa) + \nu, \tag{5.41}$$

відповідно. Інші три дійсні сталі параметри s, ξ, χ задано формулами

$$2s = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_+ + \gamma_-}, \tag{5.42}$$

$$2\xi = 1 - \frac{\varkappa}{\varkappa_+ + \varkappa_-}, \tag{5.43}$$

$$\chi = \varkappa_+ + \varkappa_- + 4\varkappa + 2\psi - e. \tag{5.44}$$

Аби зконкретизувати дійсні величини x та y, необхідно в раніше означених функціях A і B виділити їхні дійсні та уявні частини:

$$A = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{iIm}(A), \tag{5.45}$$

$$B = \mathrm{Re}(A) - \mathrm{iIm}(A). \tag{5.46}$$

Тоді розгорнутий запис для функцій x та y подається виразами

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\gamma + d/2}{\gamma_+ + \gamma_-} - \frac{\sinh(2\gamma)}{\gamma_+ + \gamma_-}[\mathrm{Re}(A)\sin(2\varkappa) + \mathrm{Im}(A)\cos(2\varkappa)] \tag{5.47}$$

і

$$y = \frac{\cosh(2\gamma)}{\varkappa_+ + \varkappa_-}[\mathrm{Re}(A)\cos(2\varkappa) - \mathrm{Im}(A)\sin(2\varkappa)], \tag{5.48}$$

відповідно. Отже часові залежності властиво дійсних функцій $\mathrm{Re}(A)$ та $\mathrm{Im}(A)$ визначають всю динаміку солітона.

З одержаного односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37) видно, що величина $\sinh(2\gamma)$ характеризує амплітуду кожної основної солітонної компоненти, тоді як параметр 4γ виявляє себе як повне число збуджень в односолітонному розв'язку. Останнє твердження випливає із загальної формули для повного числа збуджень

$$N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left[\frac{1 + \mu(m)\nu(m) + q_+(m)r_+(m) + q_-(m)r_-(m)}{1 + \mu\nu}\right], \tag{5.49}$$

застосованої до односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37).

Величина x тісно пов'язана із середньою повздовжньою координатою солітонного хвильового пакета. Припускаючи тлумачення величини x коректним, величину

$$\upsilon = -\frac{\sinh(2\gamma)}{\gamma_+ + \gamma_-}\left[\mathrm{Re}(\alpha)\sin(2\varkappa) + \mathrm{Im}(\alpha)\cos(2\varkappa)\right], \tag{5.50}$$

означену формулою $\upsilon = \dot{x}$, слід розуміти як повздовжню швидкість солітона.

Величина $1/2|\gamma_+ + \gamma_-|$, розглядувана за умови $|\gamma_+ + \gamma_-| \ll 1$, оцінює характерний розмір кожної основної солітонної компоненти в повздовжньому напрямку, проте при $|\gamma_+ + \gamma_-| \gtrsim 1$ така оцінка втрачає коректність внаслідок помітного прояву дискретности ґратки в так званому дихальному коливанні повздовжнього розміру солітона, спричиненому його повздовжнім рухом [60, 65]. У свою чергу, параметр $2(\varkappa_+ + \varkappa_-)$ є тісно пов'язаний з імпульсом солітона. Варто також зауважити, що параметр $2s$ описує розщеплення між середніми координатами верхньоланцюжкової та нижньоланцюжкової основних солітонних компонент, тоді як параметр $4(\varkappa_+ + \varkappa_-)\xi$ визначає розщеплення між фазами цих компонент.

У випадку нульового фону $\mu = 0 = \nu$ для супутніх польових змінних $\mu(n)$ і $\nu(n)$ означення (5.38)–(5.41) параметрів γ_+, $\varkappa_+$ і γ_-, $\varkappa_-$ показують, що $\gamma_+ = \gamma = \gamma_-$ і $\varkappa_+ = \varkappa = \varkappa_-$. Інакше кажучи, ми можемо розуміти параметри $1/4\gamma$ і $4\varkappa$ як деякі первинні характеристики, споріднені, відповідно, до повздовжнього розміру солітона та імпульсу солітона. Ці первинні параметри збігаються з фізичними параметрами $1/2|\gamma_+ + \gamma_-|$ і $2(\varkappa_+ + \varkappa_-)$ лише за умови $\mu = 0 = \nu$.

6. Рекурентна схема послідовних перетворень Дарбу [67]

Аби процедура одягання Дарбу стала зручною для послідовного застосування, доцільно розглядати верхні індекси мінус та плюс, що відповідають засівному та ужинковому розв'язкам, як поточні. При цьому ми ухвалимо наступні заміни

$$L^-(n|z) \to L^{(s)}(n|z), \tag{6.1}$$

$$L^+(n|z) \to L^{(c)}(n|z), \tag{6.2}$$

$$X^-(n|z) \to X^{(s)}(n|z), \tag{6.3}$$

$$X^+(n|z) \to X^{(c)}(n|z), \tag{6.4}$$

$$S(n|z) \to S^{(c)}(n|z), \tag{6.5}$$

$$z_r \to z_r(c), \tag{6.6}$$

$$\varepsilon_k(z_r) \to \varepsilon_k^{(c)}(z_r(c)), \tag{6.7}$$

вважаючи $c \equiv s + 1$ довільним додатнім цілим числом. Тут перші два записи (6.1) і (6.2) передбачають, що аналогічні зміни будуть введені і до наявних амплітуд поля. Що ж стосується c-тої матриці Дарбу $S^{(c)}(n|z)$, то вона має бути задана виразом

$$S^{(c)}(n|z) = \\ = \begin{pmatrix} z^2 + u_{11}^{(c)}(n) & f_{12}^{(s)}(n)z + u_{12}^{(c)}(n)z^{-1} \\ t_{21}^{(c)}(n)z + g_{21}^{(s)}(n)z^{-1} & t_{22}^{(c)}(n) + z^{-2} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

у повній узгодженості з властивостями $t_{12}^{(c)}(n) = f_{12}^{(s)}(n)$ і $u_{12}^{(c)}(n) = g_{21}^{(s)}(n)$, встановленими раніше.

Якщо нульовий засівний розв'язок $g_{11}^{(0)}(n)$, $f_{12}^{(0)}(n)$, $g_{12}^{(0)}(n)$, $f_{22}^{(0)}(n)$, $g_{21}^{(0)}(n)$, $f_{21}^{(0)}(n)$ та відповідна нульова допоміжна матрична функція $X^{(0)}(n|z)$ відомі, тоді N-тий ужинковий розв'язок $g_{11}^{(N)}(n)$, $f_{12}^{(N)}(n)$, $g_{12}^{(N)}(n)$, $f_{22}^{(N)}(n)$, $g_{21}^{(N)}(n)$, $f_{21}^{(N)}(n)$ визначають наступні рекурентні формули

$$g_{11}^{(c)}(n) = G_{11}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n), \tag{6.9}$$

$$f_{12}^{(c)}(n) = F_{12}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n), \tag{6.10}$$

$$g_{12}^{(c)}(n) = u_{12}^{(c)}(n+1) \tag{6.11}$$

і

$$f_{22}^{(c)}(n) = F_{22}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n), \tag{6.12}$$

$$g_{21}^{(c)}(n) = G_{21}^{(c)}(n)/D_{00}^{(c)}(n), \tag{6.13}$$

$$f_{21}^{(c)}(n) = t_{21}^{(c)}(n+1), \tag{6.14}$$

де

$$G_{11}^{(c)}(n) = \left[u_{11}^{(c)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + u_{12}^{(c)}(n+1)f_{21}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n+1)t_{21}^{(c)}(n)\right] t_{22}^{(c)}(n) - \\ - g_{21}^{(s)}(n)\left[u_{11}^{(c)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + g_{12}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n)\right], \tag{6.15}$$

$$F_{12}^{(c)}(n) = \left[u_{11}^{(c)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n) + g_{12}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n)\right] u_{11}^{(c)}(n) - \\ - f_{12}^{(s)}(n)\left[u_{11}^{(c)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n) + u_{12}^{(c)}(n+1)f_{21}^{(s)}(n) + f_{12}^{(s)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n) - u_{12}^{(c)}(n+1)t_{21}^{(c)}(n)\right], \tag{6.16}$$

$$D_{00}^{(c)}(n) = u_{11}^{(c)}(n)t_{22}^{(c)}(n) - g_{21}^{(s)}(n)f_{12}^{(s)}(n), \tag{6.17}$$

$$F_{22}^{(c)}(n)=\left[t_{22}^{(c)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n)+t_{21}^{(c)}(n+1)g_{12}^{(s)}(n)+g_{21}^{(s)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n)-t_{21}^{(c)}(n+1)u_{12}^{(c)}(n)\right]u_{11}^{(c)}(n)\;-$$
$$-\,f_{12}^{(s)}(n)\left[t_{22}^{(c)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n)+g_{21}^{(s)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n)+f_{21}^{(s)}(n)-t_{21}^{(c)}(n)\right], \tag{6.18}$$
$$G_{21}^{(c)}(n)=\left[t_{22}^{(c)}(n+1)g_{21}^{(s)}(n)+g_{21}^{(s)}(n+1)g_{11}^{(s)}(n)+f_{21}^{(s)}(n)-t_{21}^{(c)}(n)\right]t_{22}^{(c)}(n)\;-$$
$$-\,g_{21}^{(s)}(n)\left[t_{22}^{(c)}(n+1)f_{22}^{(s)}(n)+t_{21}^{(c)}(n+1)g_{12}^{(s)}(n)+g_{21}^{(s)}(n+1)f_{12}^{(s)}(n)-t_{21}^{(c)}(n+1)u_{12}^{(c)}(n)\right], \tag{6.19}$$

а верхній індекс c пробігає цілі додатні числа від 1 до N, тоді як $s=c-1$. Тут c-ті функції Дарбу $u_{11}^{(c)}(n)$, $u_{12}^{(c)}(n)$ і $t_{22}^{(c)}(n)$, $t_{21}^{(c)}(n)$ задано формулами

$$u_{11}^{(c)}(n)=U_{11}^{(c)}(n)/U_{00}^{(c)}(n), \tag{6.20}$$
$$u_{12}^{(c)}(n)=U_{12}^{(c)}(n)/U_{00}^{(c)}(n) \tag{6.21}$$

і

$$t_{22}^{(c)}(n)=T_{22}^{(c)}(n)/T_{00}^{(c)}(n), \tag{6.22}$$

$$t_{21}^{(c)}(n)=T_{21}^{(c)}(n)/T_{00}^{(c)}(n), \tag{6.23}$$

де

$$U_{11}^{(c)}(n)=Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))z_2^2(c)/z_1(c)-Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))z_1^2(c)/z_2(c)\;+$$
$$+\,f_{12}^{(s)}(n)Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))\,[z_2(c)/z_1(c)-z_1(c)/z_2(c)], \tag{6.24}$$
$$U_{12}^{(c)}(n)=Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))\left[z_1^2(c)-z_2^2(c)\right]+$$
$$+\,f_{12}^{(s)}(n)\left[Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_1(c)-Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_2(c)\right], \tag{6.25}$$
$$U_{00}^{(c)}(n)=Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))/z_2(c)-Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))/z_1(c), \tag{6.26}$$

і

$$T_{22}^{(c)}(n)=Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_2(c)/z_1^2(c)-Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_1(c)/z_2^2(c)\;+$$
$$+\,g_{21}^{(s)}(n)Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))\,[z_2(c)/z_1(c)-z_1(c)/z_2(c)], \tag{6.27}$$
$$T_{21}^{(c)}(n)=Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))\left[1/z_2^2(c)-1/z_1^2(c)\right]+$$
$$+\,g_{21}^{(s)}(n)\left[Y_1^{(s)}(n|z_2(c))Y_2^{(s)}(n|z_1(c))/z_2(c)-Y_1^{(s)}(n|z_1(c))Y_2^{(s)}(n|z_2(c))/z_1(c)\right], \tag{6.28}$$
$$T_{00}^{(c)}(n)=Y_2^{(s)}(n|z_2(c))Y_1^{(s)}(n|z_1(c))z_1(c)-Y_2^{(s)}(n|z_1(c))Y_1^{(s)}(n|z_2(c))z_2(c) \tag{6.29}$$

із введеним скороченим записом

$$Y_j^{(s)}(n|z_r(c))=\sum_{k=1}^{2}X_{jk}^{(s)}(n|z_r(c))\varepsilon_k^{(c)}(z_r(c)). \tag{6.30}$$

Всі ці формули (6.8)–(6.30) належить доповнити співвідношенням перетворення Дарбу

$$X^{(c)}(n|z)=S^{(c)}(n|z)X^{(s)}(n|z) \tag{6.31}$$

як неодмінної частини всієї рекурсивної процедури.

У випадку вакуумного нульового засівного розв'язку (5.1)–(5.6), пов'язаного із системою з притягувальним типом нелінійностей (1.1)–(1.6), коли

$$f_{jk}^{(0)}(n)=\nu\,\delta_{jk}, \tag{6.32}$$

$$g_{jk}^{(0)}(n)=\mu\,\delta_{jk}, \tag{6.33}$$

$$X_{jk}^{(0)}(n|z) = \delta_{jk}[\eta_k(z)]^n \ \exp[\varphi_k(z)], \tag{6.34}$$

із загальних формул (6.8)–(6.30) випливає перший ужинковий розв'язок $g_{11}^{(1)}(n)$, $f_{12}^{(1)}(n)$, $g_{12}^{(1)}(n)$, $f_{22}^{(1)}(n)$, $g_{21}^{(1)}(n)$, $f_{21}^{(1)}(n)$ односолітонного типу (5.32)–(5.37). Постає питання, чи можна ідентифікувати N-тий ужинковий розв'язок, заснований на вакуумному нульовому засівному розв'язку (6.32), (6.33), як N-солітонний розв'язок. Нижче ми наведемо деякі переконливі арґументи на користь позитивної відповіді.

Перш за все ми параметризуємо корені $z_1(c)$ і $z_2(c)$ рівняння $\det S^{(c)}(n|z) = 0$ за допомогою формул

$$z_1(c) = \exp[+\gamma(c) + \mathrm{i}\varkappa(c)], \tag{6.35}$$

$$z_2(c) = \exp[-\gamma(c) + \mathrm{i}\varkappa(c)], \tag{6.36}$$

де індекс c пробігає цілі додатні числа від 1 до N. Враховуючи, що величина $\sinh[2\gamma(1)]$ визначає амплітуду будь-якої з основних польових функцій у випадку суто односолітонного розв'язку, ми зосередимося на другому ужинковому розв'язку, що характеризується параметрами $\gamma(1)$ і $\gamma(2)$ з параметром $\gamma(1)$, успадкованим від односолітонного засівного розв'язку. Аби осягнути двосолітонність структури другого засівного розв'язку, достатньо показати, що в граничному випадку зникомого засівного параметра $\gamma(1)$ розв'язок виживає як новоутворений солітон з амплітудою кожної основної польової функції визначеною величиною $\sinh[2\gamma(2)]$. Найпростіший спосіб перевірити таке твердження забезпечується взаємно однозначною відповідністю між фундаментальною системою рівнянь

$$\sum_{k=1}^{2} S_{jk}^{(1)}(n|z_r(1)) X_{kk}^{(0)}(n|z_r(1)) \varepsilon_k^{(1)}(z_r(1)) = 0, \tag{6.37}$$

пов'язаною з суто односолітонним розв'язком, та її двійником

$$\sum_{k=1}^{2} S_{jk}^{(2)}(n|z_r(2)) X_{kk}^{(0)}(n|z_r(2)) \omega_k^{(2)}(z_r(2)) = 0, \tag{6.38}$$

пов'язаним з другим ужинковим розв'язком, взятим в границі зникомого $\gamma(1)$. Дійсно, структури матриць Дарбу в першій (6.37) і останній (6.38) системах є суттєво подібні, оскільки $f_{12}^{(0)}(n) = 0 = g_{21}^{(0)}(n)$ і $f_{12}^{(1)}(n) = 0 = g_{21}^{(1)}(n)$. До того ж, перенормовані параметри $\omega^{(2)}(z_r(2))$, що входять до другої системи (6.38), задаються формулами

$$\omega_1^{(2)}(z_r(2)) = \left\{ z_r^2(2) - \exp[+2\mathrm{i}\varkappa(1)] \right\} \varepsilon_1^{(2)}(z_r(2)), \tag{6.39}$$

$$\omega_2^{(2)}(z_r(2)) = \left\{ z_r^{-2}(2) - \exp[-2\mathrm{i}\varkappa(1)] \right\} \varepsilon_2^{(2)}(z_r(2)), \tag{6.40}$$

які, вочевидь, гарантують симетрію

$$\left[\omega_2^{(2)}(z_2(2))/\omega_1^{(2)}(z_2(2))\right]^* = -\omega_1^{(2)}(z_1(2))/\omega_2^{(2)}(z_1(2)), \tag{6.41}$$

що є ізоморфною до первинної симетрії

$$\left[\varepsilon_2^{(2)}(z_2(2))/\varepsilon_1^{(2)}(z_2(2))\right]^* = -\varepsilon_1^{(2)}(z_1(2))/\varepsilon_2^{(2)}(z_1(2)). \tag{6.42}$$

Таким чином, з огляду на симетрію

$$\left[\varepsilon_2^{(1)}(z_2(1))/\varepsilon_1^{(1)}(z_2(1))\right]^* = -\varepsilon_1^{(1)}(z_1(1))/\varepsilon_2^{(1)}(z_1(1)), \tag{6.43}$$

властивості параметрів $\varepsilon_k^{(1)}(z_r(1))$ і $\omega_k^{(2)}(z_r(2))$ є подібні. Нарешті, відповідність між функціями $X_{kk}^{(0)}(n|z_r(1))$ і $X_{kk}^{(0)}(n|z_r(2))$ видається самоочевидною.

За індукцією ми можемо стверджувати, що N-тий ужинковий розв'язок, заснований на вакуумному нульовому засівному розв'язку, слід трактувати як N-солітонний розв'язок.

7. Нескінченна множина локальних густин як передумова для інтеґровности системи в сенсі Ліувілля [66, 68]

Інтеґровність за Ліувіллем (Liouville) нелінійної системи, заданої на нескінченному просторовому носієві, означає, що існує нескінченна множина збережних величин, попарно інволютивних (комутативних) поміж собою [54]. Проте, вже щонайменше знання декількох локальних густин дає добру нагоду досліджувати динаміку системи. Тут під терміном "локальна густина" ми маємо на увазі густину $\rho(n)$, яка входить до локального закону збереження (аналога рівняння неперервности в дискретному просторі)

$$\dot{\rho}(n) = J(n|\, n-1) - J(n+1|\, n), \tag{7.1}$$

де величину $J(n+1/2|\,n-1/2)$ належить трактувати як потік. Що стосується величини $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\rho(n)$, то вона, вочевидь, зберігається, якщо значення потоку на обох просторових нескінченностях співпадають. Розглядаючи нашу загальну інтеґровну систему (2.6)–(2.19), ми вважатимемо, що останню вимогу виконано для всієї нескінченної множини потоків шляхом правильного вибору граничних умов для прототипових польових змінних.

У цьому розділі ми представимо у явному вигляді кілька найнижчих локальних законів збереження із нескінченної ієрархії, пов'язаної з загальною інтеґровною системою (2.6)–(2.19). Три з них випливають з універсального локального закону збереження [68]

$$\frac{d}{d\tau}\ln\left[\det L(n|z)\right]=\operatorname{Sp}A(n+1|z)-\operatorname{Sp}A(n|z), \quad (7.2)$$

який є безпосереднім наслідком рівняння нульової кривини (2.1) за умови, що $\det L(n|z)\neq 0$, тоді як решту рівнянь породжує пряма рекурсивна процедура [68], узагальнена версія якої [66] є придатна для будь-якої напівдискретної інтеґровної системи, пов'язаної з просторово одновимірною допоміжною спектральною задачею довільного порядку.

Варто зауважити, що ідея про застосування прямої рекурсивної техніки для ґенерування законів збереження вперше постала в піонерських працях Конно (Konno), Санукі (Sanuki), Ічікави (Ichikawa) [29] та Вадаті (Wadati), Санукі (Sanuki), Конно (Konno) [75], які зосереджувалися виключно на неперервних інтеґровних нелінійних системах. У випадку напівдискретних інтеґровних систем цей підхід було переформулювано Цучідою (Tsuchida), Уджіно (Ujino) і Вадаті (Wadati) [52, 53]. Однак, на відміну від узагальненої рекурсивної процедури [66], усі ці праці [29, 52, 53, 75] розглядали лише найпростіші версії прямої рекурсивної процедури, обмежившись допоміжними спектральними задачами другого порядку в сенсі Кодрі (Caudrey).

Розпочнемо з локальних законів збереження, що походять з універсального закону збереження (7.2). При цьому ми скористаємося двомірними матричними представленнями (2.4) і (2.5) для спектрального $L(n|z)$ та еволюційного $A(n|z)$ операторів з матричними елементами $A_{jk}(n|z)$, заданими в термінах прототипних польових змінних (2.12)–(2.19). Оскільки величина $\det L(n|z)$ є поліномом Лорана (Laurent) за парними степенями спектрального параметра, а величина $\operatorname{Sp}A(n+1|z)-\operatorname{Sp}A(n|z)$ не залежить від спектрального параметра зовсім, то локальні закони збереження, породжені універсальним законом збереження (7.2), постають у такому вигляді

$$\dot\rho_+(n)=J_0(n|\,n-1)-J_0(n+1|\,n), \quad (7.3)$$

$$\dot\rho_0(n)=J_0(n|\,n-1)-J_0(n+1|\,n), \quad (7.4)$$

$$\dot\rho_-(n)=J_0(n|\,n-1)-J_0(n+1|\,n). \quad (7.5)$$

Тут локальні густини $\rho_+(n)$, $\rho_0(n)$, $\rho_-(n)$ задано виразами

$$\rho_+(n)=\ln\left[f_{22}(n)-f_{21}(n)f_{12}(n)\right], \quad (7.6)$$

$$\rho_0(n)=$$
$$=\ln\left[1+g_{11}(n)f_{22}(n)-f_{12}(n)g_{21}(n)-g_{12}(n)f_{21}(n)\right], \quad (7.7)$$

$$\rho_-(n)=\ln\left[g_{11}(n)-g_{12}(n)g_{21}(n)\right], \quad (7.8)$$

а потоки виявляються однаковими для усих трьох локальних законів збереження, позаяк кожен з них пов'язаний зі спільною величиною

$$J_0(n|\,n-1)=b_{11}f_{12}(n)f_{21}(n-1)+c_{22}g_{21}(n)g_{12}(n-1). \quad (7.9)$$

Структура найнижчих локальних законів збереження (7.3)–(7.5) забезпечує ланцюжок рівнянь $\dot\rho_+(n)=\dot\rho_0(n)=\dot\rho_-(n)$. Як наслідок, функції $\exp[\rho_+(n)]$, $\exp[\rho_0(n)]$, $\exp[\rho_-(n)]$ мають відрізнятися між собою лише коефіцієнтами, незалежними від часової змінної τ. Аби вберегти однорідність простору, ці коефіцієнти треба розглядати як незалежні також і від просторової змінної n. Твердження цього абзацу при застосуванні до системи з нелінійностями притягувального типу (1.1)–(1.6) приводять до заявлених раніше природніх в'язей (1.7) і (1.8) з часонезалежними фоновими параметрами μ і ν.

Аби перейти до наступних локальних законів збереження ми коротко викладемо головні особливості прямої рекурсивної техніки в її загальній формі [66], розглядаючи спектральний $L(n|z)$ та еволюційний $A(n|z)$ оператори, задані $R\times R$ квадратовими матрицями (де $\det L(n|z)\neq 0$), без жодного посилання на дані розсіяння допоміжної спектральної задачі чи на Гамільтонову (Hamilton) структуру асоційованої інтеґровної системи. Тут ми не накладаємо жодних спрощувальних обмежень на порядок спектрального оператора з тим, аби він міг навіть співпадати з рангом R відповідної матриці.

Перш за все ми змушені оперувати із системою допоміжних функцій $\Gamma_{jk}(n|z)$, які підпорядковані правилу

$$\Gamma_{ji}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z) = \Gamma_{jk}(n|z) \tag{7.10}$$

і мусять задовольняти наступну систему просторових рівнянь Ріккаті (Riccati)

$$\Gamma_{jk}(n+1|z)\sum_{i=1}^{R} L_{ki}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z) = \\ = \sum_{i=1}^{R} L_{ji}(n|z)\Gamma_{ik}(n|z), \tag{7.11}$$

де величини $L_{jk}(n|z)$ означають матричні елементи спектрального оператора $L(n|z)$. Загальна властивість (7.10) накладає обмеження на допоміжні функції $\Gamma_{jk}(n|z)$ так, що лише $R-1$ з них можна розглядати як справді незалежні. Наприклад, маючи справу зі спектральним оператором другого порядку ($R = 2$), достатньо використовувати лише одну допоміжну функцію, тоді як спираючись на спектральний оператор третього порядку ($R = 3$), ми маємо заручитись вже двома допоміжними функціями.

Іншою ключовою складовою частиною загального підходу є сукупність твірних рівнянь

$$\frac{d}{d\tau}\ln M_{jj}(n|z) = B_{jj}(n+1|z) - B_{jj}(n|z) \tag{7.12}$$

з функціями $M_{jj}(n|z)$ та $B_{jj}(n|z)$, заданими виразами

$$M_{jj}(n|z) = \sum_{i=1}^{R} L_{ji}(n|z)\Gamma_{ij}(n|z) \tag{7.13}$$

і

$$B_{jj}(n|z) = \sum_{i=1}^{R} A_{ji}(n|z)\Gamma_{ij}(n|z), \tag{7.14}$$

де $A_{jk}(n|z)$ – матричні елементи еволюційного оператора $A(n|z)$.

Аби зґенерувати ієрархію локальних законів збереження ми мусимо шукати розв'язки рівнянь Ріккаті (Riccati) (7.11) у формі деякого прийнятного степеневого ряду відносно спектрального параметра z або оберненого спектрального параметра $1/z$. Потім, ввівши результат обчислення до твірних рівнянь (7.12) і звівши члени з однаковими степенями z або $1/z$, ми здатні прийти до нескінченної ієрархії локальних законів збереження. Локальна густина кожного локального закону збереження диктується винятково спектральним оператором, тоді як локальні потоки – поєднанням спектрального та еволюційного операторів, оскільки величини $\ln M_{jj}(n|z)$ слід розуміти як твірні функції локальних густин, а $B_{jj}(n|z)$ – як твірні функції локальних потоків.

У нашому випадку спектральної $L(n|z)$ (2.4) та еволюційної $A(n|z)$ (2.5) квадратових матриць другого порядку система просторових рівнянь Ріккаті (Riccati) зводиться до двох взаємно еквівалентних рівнянь

$$\Gamma_{12}(n+1|z)\left[f_{21}(n)z + g_{21}(n)z^{-1}\right]\Gamma_{12}(n|z) + \Gamma_{12}(n+1|z)\left[f_{22}(n) + z^{-2}\right] = \\ = \left[z^2 + g_{11}(n)\right]\Gamma_{12}(n|z) + f_{12}(n)z + g_{12}(n)z^{-1}, \tag{7.15}$$

і

$$\Gamma_{21}(n+1|z)\left[f_{12}(n)z + g_{12}(n)z^{-1}\right]\Gamma_{21}(n|z) + \Gamma_{21}(n+1|z)\left[z^2 + g_{11}(n)\right] = \\ = \left[f_{22}(n) + z^{-2}\right]\Gamma_{21}(n|z) + f_{21}(n)z + g_{21}(n)z^{-1}. \tag{7.16}$$

Отже, розвиваючи рекурсивну процедуру при $|z| \to 0$, варто розглянути перше (7.15) з двох рівнянь і шукати функцію $\Gamma_{12}(n|z)$ у вигляді

$$\Gamma_{12}(n|z) = z\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{12}(n|0|k)z^{2k}. \tag{7.17}$$

Навпаки, розвиваючи рекурсивну процедуру при $|z| \to \infty$, розумно використати друге (7.16) із двох альтернативних рівнянь і шукати функцію $\Gamma_{21}(n|z)$ у вигляді

$$\Gamma_{21}(n|z) = z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{21}(n|\infty|k)z^{-2k}. \tag{7.18}$$

Належні обчислення в межах кожної зі щойно заявлених рекурентних схем продукують для двох найпростіших (але дуже важливих) локальних законів збереження наступні вирази

$$\dot{\rho}_{12+}(n) = J_{12+}(n|\,n-1) - J_{12+}(n+1|\,n), \tag{7.19}$$

$$\dot{\rho}_{21-}(n) = J_{21-}(n|\,n-1) - J_{21-}(n+1|\,n), \tag{7.20}$$

де

$$\rho_{12+}(n) = f_{22}(n) + g_{21}(n)g_{12}(n-1), \tag{7.21}$$

$$\rho_{21-}(n) = g_{11}(n) + f_{12}(n)f_{21}(n-1) \tag{7.22}$$

і

$$\begin{aligned} J_{12+}(n+1|\,n) = {} & c_{22}g_{21}(n+1)g_{12}(n)f_{22}(n) - \\ & - c_{22}g_{21}(n+1)f_{12}(n) - f_{21}(n)b_{11}g_{12}(n) - \\ & - c_{22}g_{21}(n+1)\,[g_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)]\,g_{12}(n-1), \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned} J_{21-}(n+1|\,n) = {} & b_{11}f_{12}(n+1)f_{21}(n)g_{11}(n) - \\ & - b_{11}f_{12}(n+1)g_{21}(n) - g_{12}(n)c_{22}f_{21}(n) - \\ & - b_{11}f_{12}(n+1)\,[f_{22}(n) - f_{21}(n)f_{12}(n)]\,f_{21}(n-1). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Інші дві допустимі, але більш громіздкі рекурсивні процедури обчислення ґрунтуються на розкладанні в ряд

$$\Gamma_{21}(n|z) = z\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{21}(n|0|k)z^{2k} \tag{7.25}$$

за умови $|z| \to 0$ і розкладанні в ряд

$$\Gamma_{12}(n|z) = z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{12}(n|\infty|k)z^{-2k} \tag{7.26}$$

за умови $|z| \to \infty$. Ці розклади було використано, відповідно, в другому (7.16) та першому (7.15) з двох еквівалентних рівнянь Ріккаті (Riccati). Результати обчислень відтворюють два локальні закони збереження (7.3) і (7.5), вже виведені раніше з універсального локального закону збереження (7.2), та продукують додатково серію нових. Найпростішими і разом з тим важливими серед них є локальні закони збереження

$$\dot{\rho}_{21+}(n) = J_{21+}(n|\,n-1) - J_{21+}(n+1|\,n), \tag{7.27}$$

$$\dot{\rho}_{12-}(n) = J_{12-}(n|\,n-1) - J_{12-}(n+1|\,n), \tag{7.28}$$

де

$$\rho_{21+}(n) = f_{22}(n) + g_{21}(n+1)g_{12}(n), \tag{7.29}$$

$$\rho_{12-}(n) = g_{11}(n) + f_{12}(n+1)f_{21}(n) \tag{7.30}$$

і

$$\begin{aligned} J_{21+}(n|\,n-1) = {} & c_{22}f_{22}(n)g_{21}(n)g_{12}(n-1) - \\ & - c_{22}f_{21}(n)g_{12}(n-1) - g_{21}(n)b_{11}f_{12}(n) - \\ & - c_{22}g_{21}(n+1)\,[g_{11}(n) - g_{12}(n)g_{21}(n)]\,g_{12}(n-1), \end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} J_{12-}(n|\,n-1) = {} & b_{11}g_{11}(n)f_{12}(n)f_{21}(n-1) - \\ & - b_{11}g_{12}(n)f_{21}(n-1) - f_{12}(n)c_{22}g_{21}(n) - \\ & - b_{11}f_{12}(n+1)\,[f_{22}(n) - f_{21}(n)f_{12}(n)]\,f_{21}(n-1). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Оскільки будь-яку функцію у формі $F(n+1|n) - F(n|n-1)$ можна завжди взяти за густину в деякому тривіальному локальному законі збереження, то локальні густини $\rho_{12+}(n)$ і $\rho_{21+}(n)$ належить розглядати як фізично еквівалентні. Очевидно, таке саме твердження стосується також і локальних густин $\rho_{21-}(n)$ та $\rho_{12-}(n)$.

8. Гамільтонове представлення первинної нелінійної Шрьодінґерової системи з притягувальними нелінійностями [67, 68]

Тепер, коли найнижчі локальні густини загальної напівдискретної інтеґровної нелінійної системи вже відомі, ми можемо підлаштувати їх до потреб окремої редукованої системи з метою віднайти її Гамільтонове (Hamilton) представлення в термінах правильно означених Гамільтонової (Hamilton) функції і Пуассонової (Poisson) дужки (Пуассонової структури). У цій статті ми обмежимось випадком нелінійної Шрьодінґерової системи на стьожці трикутної ґратки (1.1)–(1.6) за притягувального типу нелінійностей.

Аби бути послідовними, ми маємо пам'ятати, що властивість $\dot{\rho}_+(n) = \dot{\rho}_0(n) = \dot{\rho}_-(n)$ інспірує дві природні в'язі (1.7) і (1.8), які вказують, що польові змінні $\mu(n)$ і $\nu(n)$ (називані супутніми змінними) насправді залежать від основних польових змінних $q_+(n)$, $q_-(n)$ і $r_+(n)$, $r_-(n)$.

Внаслідок цього, аби застосувати загальні принципи Гамільтонового підходу [21,38,78], ми для початку мусимо працювати лише з основними рівняннями (*тобто* рівняннями (1.1)– (1.4)) аби спробувати переписати їх в уніфікованій формі

$$\dot{\mathrm{y}}_\lambda(n) = \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m) \frac{\partial H}{\partial \mathrm{y}_\varkappa(m)} \tag{8.1}$$

з величиною H, задіяною в якості Гамільтонової функції, і метричними елементами (елементами структурної або симплектичної матриці) $\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$, підпорядкованими умові антисиметричности $\mathrm{J}_{\varkappa\lambda}(m|n) = -\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$. Тут $\mathrm{y}_1(n)$, $\mathrm{y}_2(n)$, $\mathrm{y}_3(n)$, $\mathrm{y}_4(n)$ – деякий повний набір незалежних польових змінних, записаних в уніфікованій формі. Вищенаведений вираз (8.1) є досить універсальний, позаяк він допускає велику низку конкретних функціональних співвідношень між уніфікованими і основними польовими змінними. У цьому розділі ми приймемо найпростішу лінійну відповідність між цими двома множинами польових змінних, задану співвідношеннями

$$_p\mathrm{y}_1(n) = q_-(n), \tag{8.2}$$

$$_p\mathrm{y}_2(n) = q_+(n), \tag{8.3}$$

$$_p\mathrm{y}_3(n) = r_-(n), \tag{8.4}$$

$$_p\mathrm{y}_4(n) = r_+(n). \tag{8.5}$$

Тут індекс p спереду величини $_p\mathrm{y}_\lambda$ вказує, що насправді ми маємо справу з первинними основними польовими змінними, замаскованими під уніфіковані, (*тобто* з такими основними польовими змінними, якими вони є в первинній версії (1.1)–(1.6) напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв’язками). Ми зберігатимемо такий самий індекс спереду усих величин, притаманних первинній системі (1.1)–(1.6) в рамках Гамільтонового викладу.

Досвід, надбаний при розгляді інших напівдискретних інтеґровних нелінійних систем Шрьодінґерового типу [27, 32, 47, 59], підказує нам шукати густину Гамільтонової функції вихідної системи (1.1)–(1.6) як деяку суперпозицію других локальних густин, що входять до локальних законів збереження (див. формули (7.21), (7.22) та (7.29), (7.30) з розділу 7, супроводжувані формулами (2.20)–(2.25) з розділу 2). Таке спостереження приводить до наступного претендента [67, 68]

$$_pH = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[q_+(m)r_-(m-1) + \mu(m) - \mu] - \\ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta[r_+(m)q_-(m-1) + \nu(m) - \nu] \tag{8.6}$$

на Гамільтонову функцію. Тоді, порівнюючи вихідні основні рівняння (1.1)–(1.4) з їхньою шуканою уніфікованою формою (8.1), ми одержуємо сукупність претендентів на метричні елементи $_p\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$ в термінах основних і супутніх польових змінних. Вирази для їхніх ненульових представників подано нижче [68]:

$$_p\mathrm{J}_{13}(n|m) = -\mathrm{i}[1 + q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm}, \tag{8.7}$$

$$_p\mathrm{J}_{14}(n|m) = -\mathrm{i}[q_-(n)r_+(n) - \mu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.8}$$

$$_p\mathrm{J}_{23}(n|m) = -\mathrm{i}[q_+(n)r_-(n) - \nu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.9}$$

$$_p\mathrm{J}_{24}(n|m) = -\mathrm{i}[1 + q_+(n)r_+(n)]\delta_{nm}, \tag{8.10}$$

$$_p\mathrm{J}_{31}(n|m) = +\mathrm{i}[1 + r_-(n)q_-(n)]\delta_{nm}, \tag{8.11}$$

$$_p\mathrm{J}_{32}(n|m) = +\mathrm{i}[r_-(n)q_+(n) - \nu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.12}$$

$$_p\mathrm{J}_{41}(n|m) = +\mathrm{i}[r_+(n)q_-(n) - \mu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.13}$$

$$_p\mathrm{J}_{42}(n|m) = +\mathrm{i}[1 + r_+(n)q_+(n)]\delta_{nm}. \tag{8.14}$$

Решта метричних елементів є нульові. Як тільки претендентів на метричні елементи знайдено, ми маємо перевірити, чи величина $\{F, G\}$, задана формулою

$$\{F, G\} = \\ = -\sum_{\lambda=1}^{4} \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}_\lambda(n)} \mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m) \frac{\partial G}{\partial \mathrm{y}_\varkappa(m)}, \tag{8.15}$$

задовольняє усі вимоги, що підкріплюють означення дужки Пуассона (Poisson) [21, 38, 78]. Найкритичнішою з них є вимога

$$\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0, \tag{8.16}$$

зголошена на тотожність Якобі. Відповідно до загального правила [21, 38, 78] ця вимога (8.16) рівносильна системі рівнянь

$$\sum_{\varkappa=1}^{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{J}_{\varkappa\lambda}(k|l)\frac{\partial \mathrm{J}_{\mu\nu}(m|n)}{\partial \mathrm{y}_{\varkappa}(k)}+\mathrm{J}_{\varkappa\mu}(k|m)\frac{\partial \mathrm{J}_{\nu\lambda}(n|l)}{\partial \mathrm{y}_{\varkappa}(k)}+\mathrm{J}_{\varkappa\nu}(k|n)\frac{\partial \mathrm{J}_{\lambda\mu}(l|m)}{\partial \mathrm{y}_{\varkappa}(k)}\right]=0. \tag{8.17}$$

NB. Тут індекси, позначені літерами μ і ν, не мають нічого спільного з фоновими параметрами, визначеними як $\mu = \lim_{|n|\to\infty}\mu(n)$ і $\nu = \lim_{|n|\to\infty}\nu(n)$.

Безпосереднє підставлення раніше одержаних виразів (8.7)–(8.14) для величин ${}_p\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$ з використанням виразів для похідних $\partial\mu(n)/\partial_p \mathrm{y}_{\varkappa}(n)$ і $\partial\nu(n)/\partial_p \mathrm{y}_{\varkappa}(n)$, що випливають з природніх в'язей (1.7) і (1.8), зводить набір вимог (8.17) до набору тотожностей. У результаті тотожність Якобі (8.16) виявляється справедливою, виправдовуючи таким чином як означення дужки Пуассона (8.15), так і вибір функції Гамільтона (8.6).

Використовуючи загальне означення дужки Пуассона (8.15), конкретизоване формулами для метричних елементів (8.7)–(8.14), і враховуючи співвідношення між уніфікованими і основними польовими змінними (8.2)–(8.5), можна сміливо обчислити усі можливі дужки Пуассона, пов'язані з основними $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$ і супутніми $\mu(n)$, $\nu(n)$ польовими змінними. Їхній список наведено нижче

$$\{q_+(m), r_+(n)\} = +\mathrm{i}\,[1+q_+(n)r_+(n)]\delta_{nm}, \tag{8.18}$$

$$\{q_+(m), r_-(n)\} = +\mathrm{i}\,[q_+(n)r_-(n)-\nu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.19}$$

$$\{q_-(m), r_-(n)\} = +\mathrm{i}\,[1+q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm}, \tag{8.20}$$

$$\{q_-(m), r_+(n)\} = +\mathrm{i}\,[q_-(n)r_+(n)-\mu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.21}$$

$$\{q_+(m), q_+(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_+(n)\}, \tag{8.22}$$

$$\{q_+(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_-(n)\}, \tag{8.23}$$

$$\{q_-(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_-(m), r_-(n)\}, \tag{8.24}$$

$$\{\mu(m), \nu(n)\} = +\mathrm{i}\,[q_+(n)r_+(n)-q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm}, \tag{8.25}$$

$$\{\mu(m), \mu(n)\} = 0 = \{\nu(m), \nu(n)\}, \tag{8.26}$$

$$\{\mu(m), r_-(n)\} = +\mathrm{i}\,[r_+(n)+r_-(n)\mu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.27}$$

$$\{\mu(m), q_+(n)\} = -\mathrm{i}\,[q_-(n)+q_+(n)\mu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.28}$$

$$\{\nu(m), q_-(n)\} = -\mathrm{i}\,[q_+(n)+q_-(n)\nu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.29}$$

$$\{\nu(m), r_+(n)\} = +\mathrm{i}\,[r_-(n)+r_+(n)\nu(n)]\delta_{nm}, \tag{8.30}$$

$$\{\mu(m), r_+(n)\} = 0 = \{\nu(m), q_+(n)\}, \tag{8.31}$$

$$\{\mu(m), q_-(n)\} = 0 = \{\nu(m), r_-(n)\}. \tag{8.32}$$

Покладаючись на ці результати (8.18)–(8.32), неважко перевірити, що нелінійна система Шрьодінґера на стьожці трикутної ґратки (1.1)–(1.6) допускає стисле Гамільтонове представлення

$$\dot{q}_+(n) = \{{}_pH, q_+(n)\}, \tag{8.33}$$

$$\dot{r}_+(n) = \{{}_pH, r_+(n)\}, \tag{8.34}$$

$$\dot{q}_-(n) = \{{}_pH, q_-(n)\}, \tag{8.35}$$

$$\dot{r}_-(n) = \{{}_pH, r_-(n)\}, \tag{8.36}$$

$$\dot{\mu}(n) = \{{}_pH, \mu(n)\}, \tag{8.37}$$

$$\dot{\nu}(n) = \{{}_pH, \nu(n)\} \tag{8.38}$$

з Гамільтоновою функцією ${}_pH$, заданою раніше дібраною формулою (8.6).

Хоча сама Гамільтонова функція (8.6) і не виявляє жодних ознак нелінійної взаємодії, оскільки вона задана квадратичною формою за польовими змінними, тим не менше нелінійні взаємодії з'являються в первинній динамічній системі (1.1)–(1.6) завдяки надзвичайно нестандартній формі приналежних дужок Пуассона (8.18)–(8.32). Постає питання, чи можна стандартизувати форму Пуассонової структури і перенести всі нелінійні взаємодії повністю в стандартизовану Гамільтонову функцію. За деяких (термінологічно завуальованих але вірогідних) умов позитивне твердження стосовно цієї проблеми проголошує теорема Дарбу (Darboux) [15, 16, 21, 38, 78], проте вона не дає жодних розумних настанов щодо способу виконання такої стандартизації. Першою практичною підказкою у розплутуванні Гордієвого вузла стандартизації для нас став факт різко вираженої критичности первинної (нестандартизованої) нелінійної системи (1.1)–(1.6) відносно керівного фонового параметра $\mu\nu$. Тему критичности системи ми розглянемо в наступному розділі.

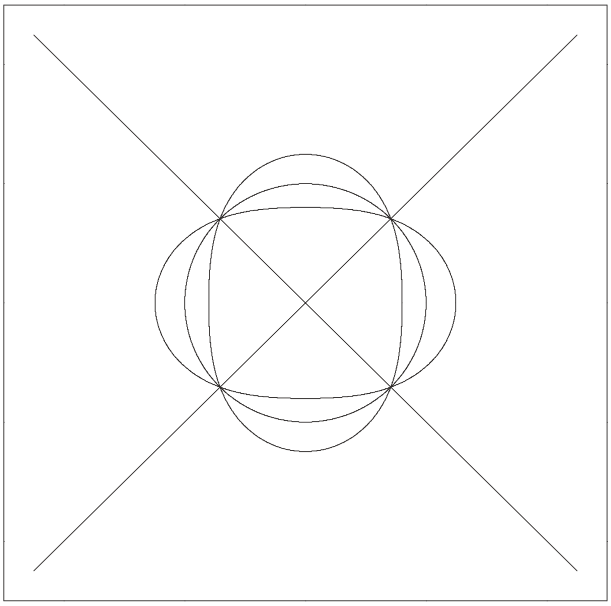

Рис. 2. Типове розбиття на області аналітичности для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$ при докритичних значеннях фонового параметра $\mu\nu < 1$ (*буквально при* $\mu\nu = \exp(-\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора четвертого порядку

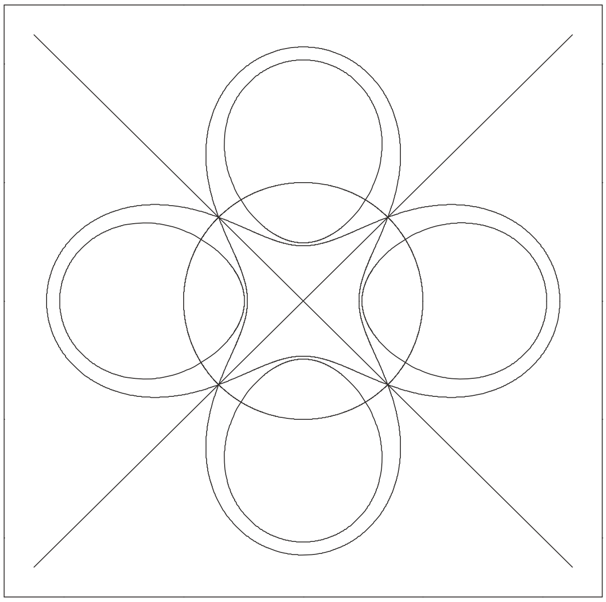

Рис. 3. Типове розбиття на області аналітичности для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$ при надкритичних значеннях фонового параметра $\mu\nu > 1$ (*буквально при* $\mu\nu = \exp(+\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора четвертого порядку

Варто зауважити, що нестандартна форма Пуассонові структури є досить типовою властивістю інтеґровних нелінійних систем, пов'язаних з дискретними спектральними задачами. Для прикладу можна навести систему Абловіца–Ладіка (Ablowitz–Ladik) [1, 2], чия нестандартна Пуассонова структура [27, 32, 47] стає на заваді сприйнятливого трактування її польових змінних в чітких і зрозумілих фізичних термінах.

9. Критичність первинної динамічної системи відносно фонового параметра [63, 69]

Фактично критичність напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками (1.1)–(1.6) відносно фонового параметра $\mu\nu$ було виявлено, досліджуючи спектр її низькоамплітудних збуджень [63]. Схожий результат був одержаний при конструюванні областей аналітичности Йостових (Jost) функцій допоміжної задачі розсіяння, асоційованої з рівняннями системи (1.1)–(1.6) [63].

Згідно з підходом Кодрі (Caudrey) до оберненої задачі розсіяння [12, 61, 62] лінії, що розділяють області аналітичности відмінних Йостових (Jost) функцій в площині комплексного спектрального параметра z, визначаються набором рівнянь

$$|\eta_j(z)| = |\eta_k(z)|, \tag{9.1}$$

де $\eta_j(z)$ символізує j-те власне значення граничного спектрального оператора $L(z)$, означеного в розділі 2, а індекси j та k охоплюють усі можливі комбінації таким чином, аби запобігти своєму взаємному збігові.

Звернувшись до досліджуваної системи (1.1)–(1.6) та врахувавши 4×4 матричне представлення (2.2) допоміжного спектрального оператора $L(n|z)$, ми приходимо до сукупности з чотирьох відмінних власних значень (2.31)–(2.34) граничного спектрального оператора $L(z)$. У результаті умова (9.1), що визначає границі між областями аналітичности, складається з шести рівнянь.

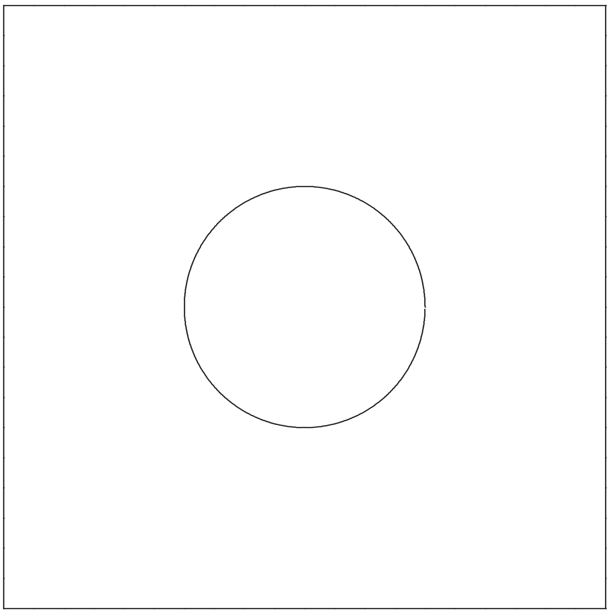

Рис. 4. Розбиття на області аналітичности для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$ при докритичних значеннях фонового параметра $\mu\nu < 1$. Випадок допоміжного спектрального оператора другого порядку

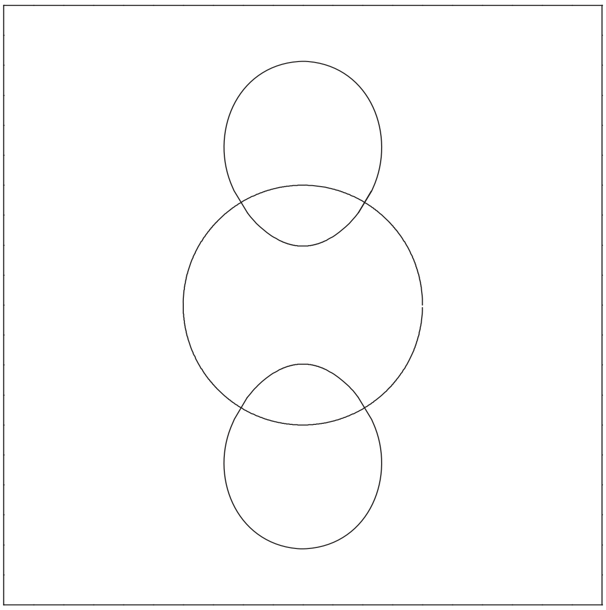

Рис. 5. Типове розбиття на області аналітичности для функцій Йоста в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$ при надкритичних значеннях фонового параметра $\mu\nu > 1$ (*буквально при* $\mu\nu = \exp(+\pi/2)$). Випадок допоміжного спектрального оператора другого порядку

Належний аналіз цих рівнянь вказує на критичну якісну перебудову структури областей аналітичности, що відбувається, коли фоновий параметр $\mu\nu$ перетинає своє критичне значення $\mu\nu = 1$ [63]. Рисунки 2 і 3 демонструють типове розбиття на області аналітичности в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$, відповідно при докритичних $\mu\nu < 1$ і надкритичних $\mu\nu > 1$ значеннях фонового параметра $\mu\nu$ у випадку допоміжного спектрального оператора четвертого порядку. Тут дійсного фазового параметра δ задано співвідношенням $\mu/\nu = \exp(+4i\delta)$.

Кросовер в упорядкуванні областей аналітичности Йостових функцій є родовою властивістю досліджуваної системи (1.1)–(1.6) і неминуче відбувається також і у випадку 2×2 матричного представлення (2.4) допоміжного спектрального оператора $L(n|z)$, коли ми маємо лише два відмінні власні значення (2.35) і (2.36) граничного спектрального оператора $L(z)$, а відтак лише одне рівняння в умові (9.1), що визначає межі між областями аналітичности. На рисунках 4 і 5 показано типове розбиття на області аналітичности в площині фазоузгідненого спектрального параметра $z\exp(-i\delta)$, відповідно при докритичних $\mu\nu < 1$ і надкритичних $\mu\nu > 1$ значеннях фонового параметра $\mu\nu$ у випадку допоміжного спектрального оператора другого порядку.

Аби виявити критичність відносно фонового параметра $\mu\nu$ безпосередньо в первинній (нестандартизованій) нелінійній системі (1.1)–(1.6) ми перепишемо систему двох природніх в'язей (1.7) і (1.8) за допомогою трьох формул

$$\mu(n) - q_-(n)r_+(n) = \mu\exp[+\rho(n)], \tag{9.2}$$

$$1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n) =$$

$$= (1 + \mu\nu)\exp[+\rho(n)], \tag{9.3}$$

$$\nu(n) - q_+(n)r_-(n) = \nu\exp[+\rho(n)], \tag{9.4}$$

де спільна дійсна величина $\rho(n)$ здогадно є повною густиною збуджень на обох ланцюжках драбинчастої ґратки. Тоді комбінуючи попередні співвідношення (9.2)–(9.4), ми одержуємо вираз [69]

$$2[q_+(n)+\nu(n)q_-(n)][r_+(n)+\mu(n)r_-(n)]+2[q_-(n)+\mu(n)q_+(n)][r_-(n)+\nu(n)r_+(n)]+ \\ +[q_+(n)r_+(n)-q_-(n)r_-(n)]^2+[1-\mu(n)\nu(n)]^2=(1-\mu\nu)^2\exp[+2\rho(n)], \tag{9.5}$$

який, вочевидь, є істотно критичним відносно значення фонового параметра $\mu\nu$. Дійсно, в точці $\mu\nu=1$ права частина цього виразу (9.5) зникає тотожньо, і ми мусимо кожен член лівої частини прирівняти до нуля внаслідок невід'ємности кожного такого члена, очевидної з притаманних симетрій $r_+^*(n)=q_+(n)$, $r_-^*(n)=q_-(n)$ і $\nu^*(n)=\mu(n)$ первинних польових амплітуд. Ці вимоги, справедливі лише в самій критичній точці $\mu\nu=1$, є рівнозначними до сукупности додаткових в'язей

$$q_+(n)+\nu(n)q_-(n)=0=r_+(n)+\mu(n)r_-(n), \tag{9.6}$$

$$q_-(n)+\mu(n)q_+(n)=0=r_-(n)+\nu(n)r_+(n), \tag{9.7}$$

$$\mu(n)\nu(n)=1, \tag{9.8}$$

які згортають первинну багатокомпонентну нелінійну динамічну систему (1.1)–(1.6), задану на стьожці трикутної ґратки з двома вузлами в елементарній комірці, до двокомпонентної нелінійної динамічної системи

$$+\mathrm{i}\dot q(n)+[\alpha q(n+1)+\beta q(n-1)][1+q(n)r(n)]=0, \tag{9.9}$$

$$-\mathrm{i}\dot r(n)+[\beta r(n+1)+\alpha r(n-1)][1+r(n)q(n)]=0, \tag{9.10}$$

заданої на ланцюжку винятково одновимірної ґратки з одним вузлом в елементарній комірці. Тут згорнуті польові змінні $q(n)$ і $r(n)$ означено згідно з такими формулами параметризації

$$q_+(n)\exp[-\mathrm{i}(2\delta-\pi)(n-1/2)]=q(n)= \\ =q_-(n)\exp[-\mathrm{i}(2\delta-\pi)(n+1/2)], \tag{9.11}$$

$$r_+(n)\exp[+\mathrm{i}(2\delta-\pi)(n-1/2)]=r(n)= \\ =r_-(n)\exp[+\mathrm{i}(2\delta-\pi)(n+1/2)], \tag{9.12}$$

$$\mu(n)\exp[-2\mathrm{i}\delta]=1=\nu(n)\exp[+2\mathrm{i}\delta] \tag{9.13}$$

за припущення, що дійсний фазовий параметр δ є часонезалежний.

Отже, в критичній точці $\mu\nu=1$ первинна нелінійна інтеґровна система (1.1)–(1.6) скорочується до простішої системи (9.9) і (9.10), яку можна віднести до узагальнення інтеґровної системи Абловіца–Ладіка [1, 2] на випадок часозалежних параметрів зв'язку α і β [30, 60]. В результаті, кількість незалежних польових змінних зменшується наполовину, тоді як супутні польові змінні тривіалізуються до простих констант. Тим не менше, як в докритичній області $\mu\nu<1$, так і в надкритичній області $\mu\nu>1$ система залишається багатокомпонентною і не може буди зведена до простішої системи (здогадно Абловіца–Ладіка) шляхом будь-якого перетворення. Це твердження співпадає з тим фактом, що структурна матриця, пов'язана з первинною інтеґровною системою (1.1)–(1.6) (*тобто* структурна матриця з матричними елементами ${}_p\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$, заданими формулами (8.7)–(8.14)), стає, як буде показано далі, виродженою лише в критичній точці $\mu\nu=1$.

Достоту, завдяки діагональності первинної структурної матриці відносно просторових індексів n і m достатньо мати справу лише з детермінантом ${}_pD(n)$ локальної структурної матриці, *тобто* з детермінантом 4×4 квадратової матриці, чиї елементи ${}_p\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|n)$ позначено літерами λ і $\varkappa$ як винятково поточними індексами. Виходячи із співвідношень (8.7)–(8.14), що специфікують елементи ${}_p\mathrm{J}_{\lambda\varkappa}(n|m)$ структурної матриці, явний вираз для локального визначника ${}_pD(n)$ задається формулою

$${}_pD(n)=\left\{[1+q_+(n)r_+(n)][1+q_-(n)r_-(n)]-[\mu(n)-q_-(n)r_+(n)][\nu(n)-q_+(n)r_-(n)]\right\}^2. \tag{9.14}$$

Цей вираз (9.14) чітко вказує не те, що за критичної величини $\mu\nu=1$ фонового параметра $\mu\nu$ визначник ${}_pD(n)$ локальної структурної матриці, а отже і визначник $\prod_{m=-\infty}^{\infty}{}_pD(m)$ усієї структурної матриці прямують до нуля тотожньо завдяки в'язям критичности (9.6)–(9.8).

10. Симетричний набір проміжних основних польових змінних та їхні фундаментальні дужки Пуассона [71]

Позаяк і ліва, і права частини формули з виявлення критичности (9.5) є суттєво невід'ємні, і до того ж права частина є повним квадратом суто дійсної функції, постає ідея влаштувати повний квадрат деякого дійсного виразу і з лівої частини також. Ця пропозиція спонукає до підстановок

$$q_+(n) + \nu(n) q_-(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} [1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\mathrm{u}_+(n), \tag{10.1}$$

$$r_+(n) + \mu(n) r_-(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} [1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\mathrm{v}_+(n), \tag{10.2}$$

$$q_-(n) + \mu(n) q_+(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} [1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]\mathrm{u}_-(n), \tag{10.3}$$

$$r_-(n) + \nu(n) r_+(n) = \frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} [1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]\mathrm{v}_-(n), \tag{10.4}$$

які слугують для введення нових основних польових змінних $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ замість первинних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $q_-(n)$, $r_-(n)$. Тут симетрії комплексного спряження $r_+^*(n) = q_+(n)$, $r_-^*(n) = q_-(n)$ і $\nu^*(n) = \mu(n)$ первинних польових амплітуд забезпечують виконання аналогічних симетрій $\mathrm{v}_+^*(n) = \mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_-^*(n) = \mathrm{u}_-(n)$ для нових основних польових амплітуд і, таким чином, гарантують невід'ємність добутків $\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)$. Ці нові основні польові змінні $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ відіграватимуть проміжну, але дуже важливу роль в наших подальших міркуваннях.

Отже, беручи квадратний корінь рівняння з виявлення критичности (9.5) із використанням щойно ухвалених означень (10.1)–(10.4), одержимо

$$\frac{1 - \mu(n)\nu(n)}{1 - \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} [1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)] = (1 - \mu\nu) \exp[+\rho(n)]. \tag{10.5}$$

Тут знаки квадратних коренів було дібрано так, аби забезпечити коректні граничні значення $\mathrm{u}_+(n) = q_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n) = r_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n) = q_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n) = r_-(n)$ проміжних основних польових змінних $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ за нульових фонових значень $\mu = 0 = \nu$ супутніх полів (див. формули (9.2), (9.4) і (10.1)–(10.4) для роз'яснення). Втім, будучи прямим наслідком семи раніше виписаних формул (9.2)–(9.4) і (10.1)–(10.4), одержане співвідношення (10.5) дає змогу значно спростити розрахунки величин $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$ і $\exp[+\rho(n)]$ в термінах проміжних польових амплітуд $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$. Відповідні результати представлено нижче

$$q_+(n) = \frac{\mathrm{u}_+(n)[1 + \mu\nu\, \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)] - \nu\, \mathrm{u}_-(n)[1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]}{1 - \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.6}$$

$$r_+(n) = \frac{\mathrm{v}_+(n)[1 + \mu\nu\, \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)] - \mu\, \mathrm{v}_-(n)[1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]}{1 - \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.7}$$

$$q_-(n) = \frac{\mathrm{u}_-(n)[1 + \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)] - \mu\, \mathrm{u}_+(n)[1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]}{1 - \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.8}$$

$$r_-(n) = \frac{\mathrm{v}_-(n)[1 + \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)] - \nu\, \mathrm{v}_+(n)[1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]}{1 - \mu\nu\, \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.9}$$

$$\mu(n) = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_+(n) + \mu\,[1-\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]}{1-\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.10}$$

$$\nu(n) = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_-(n) + \nu\,[1-\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]}{1-\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{10.11}$$

$$\exp[+\rho(n)] = \frac{[1-\mu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_-(n)][1-\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_+(n)]}{[1-\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]^2}\,[1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]. \tag{10.12}$$

Ці сім формул (10.6)–(10.12) було перевірено шляхом прямих підстановок в головні визначальні співвідношення (9.2)–(9.4) і (10.1)–(10.4) та в допоміжне співвідношення (10.5).

Одержані формули перетворення (10.6)–(10.11) уможливлюють повне вилучення супутніх полів $\mu(n)$ і $\nu(n)$ з динаміки системи. Однак, навіть такий позитивний факт не приводить автоматично до канонічних польових змінних. Перш за все при ненульових фонових величинах μ і ν супутніх полів два набори проміжних польових амплітуд $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ у формулі (10.12) для $\exp[+\rho(n)]$, вочевидь, є тісно змішані. До того ж набір фундаментальних Пуассонових дужок, пов'язаних з проміжними польовими амплітудами, демонструє істотні переплутування між усима динамічними змінними.

Аби підтвердити останнє твердження, ми звернемося до реєстру дужок Пуассона (8.18)–(8.32), пов'язаних з первинними польовими змінними $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$ і $\mu(n)$, $\nu(n)$. Як було показано в розділі 9, структурна матриця, відповідальна за ці дужки (8.18)–(8.32), вироджується лише при критичному значенні $\mu\nu = 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Отже, поза межами критичної точки (*тобто* при $\mu\nu \neq 1$) ми можемо без ризику застосовувати всі потрібні формули із наведеного списку (8.18)–(8.32) при обчислюванні фундаментальних дужок Пуассона, пов'язаних з проміжними польовими змінними $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$. Встановлені результати підсумовано співвідношеннями

$$\{\mathrm{u}_+(m),\mathrm{v}_+(n)\} = \frac{\mathrm{i}}{1-\mu\nu}\,[1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]\delta_{nm}, \tag{10.13}$$

$$\{\mathrm{u}_+(m),\mathrm{v}_-(n)\} = \frac{\mathrm{i}\,\nu}{1-\mu\nu}\,\frac{1-\mu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_-(n)}{1-\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_+(n)}\,[1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\delta_{nm}, \tag{10.14}$$

$$\{\mathrm{u}_-(m),\mathrm{v}_-(n)\} = \frac{\mathrm{i}}{1-\mu\nu}\,[1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)][1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\delta_{nm}, \tag{10.15}$$

$$\{\mathrm{u}_-(m),\mathrm{v}_+(n)\} = \frac{\mathrm{i}\,\mu}{1-\mu\nu}\,\frac{1-\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_+(n)}{1-\mu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_-(n)}\,[1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\delta_{nm}, \tag{10.16}$$

$$\{\mathrm{u}_+(m),\mathrm{u}_+(n)\} = \{\mathrm{u}_+(m),\mathrm{u}_-(n)\} = \{\mathrm{u}_-(m),\mathrm{u}_-(n)\} = 0, \tag{10.17}$$

$$\{\mathrm{v}_+(m),\mathrm{v}_+(n)\} = \{\mathrm{v}_+(m),\mathrm{v}_-(n)\} = \{\mathrm{v}_-(m),\mathrm{v}_-(n)\} = 0. \tag{10.18}$$

Упродовж досить довгих і громіздких розрахунків цих формул (10.13)–(10.18) ми змушені були знайти вирази для проміжних польових змінних $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ в термінах початкових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$, використовуючи вихідні означення (10.1)–(10.4), а потім просуватися крок за кроком крізь увесь список шуканих фундаментальних дужок Пуассона, беручи до уваги вирази (10.6)–(10.11) для старих польових змінних в термінах нових.

З огляду на загальне означення дужки Пуассона (*тобто* Пуассонової структури) (8.15) ненульові елементи структурної матриці, пов'язані з проміжними польовими змінними, задаються формулами

$$ {}_i\mathrm{J}_{13}(n|m) = -{}_i\mathrm{J}_{31}(m|n) = -\{\mathrm{u}_-(m), \mathrm{v}_-(n)\}, \quad (10.19) $$

$$ {}_i\mathrm{J}_{14}(n|m) = -{}_i\mathrm{J}_{41}(m|n) = -\{\mathrm{u}_-(m), \mathrm{v}_+(n)\}, \quad (10.20) $$

$$ {}_i\mathrm{J}_{23}(n|m) = -{}_i\mathrm{J}_{32}(m|n) = -\{\mathrm{u}_+(m), \mathrm{v}_-(n)\}, \quad (10.21) $$

$$ {}_i\mathrm{J}_{24}(n|m) = -{}_i\mathrm{J}_{42}(m|n) = -\{\mathrm{u}_+(m), \mathrm{v}_+(n)\}. \quad (10.22) $$

Відповідний локальний структурний визначник

$$ {}_iD(n) = \big\{\{\mathrm{u}_+(n), \mathrm{v}_+(n)\}\{\mathrm{u}_-(n), \mathrm{v}_-(n)\} - \{\mathrm{u}_+(n), \mathrm{v}_-(n)\}\{\mathrm{u}_-(n), \mathrm{v}_+(n)\}\big\}^2 \quad (10.23) $$

набуває форми

$$ {}_iD(n) = \frac{[1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]^2\,[1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]^2}{(1 - \mu\nu)^2\,[1 - \mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]^2} \quad (10.24) $$

і, як видно, стає розбіжним, коли фоновий параметр $\mu\nu$ прямує до одиниці.

Пригадуючи, що локальний структурний визначник ${}_pD(n)$ (9.14), пов'язаний з первинними польовими змінними, прямує до нуля, коли фоновий параметр $\mu\nu$ прямує до одиниці, варто шукати певного компромісу між проміжними і первинними польовими змінними і ввести ту чи іншу асиметричну множину польових змінних шляхом належного вибору двох взаємодоповняльних підмножин. Ідея про асиметрію підтверджується також вже доведеним фактом того, що число незалежних польових змінних скорочується наполовину, коли фоновий параметр $\mu\nu$ набуває свого критичного значення, рівного одиниці. Отже, слід очікувати, що підсистема, описувана проміжними польовими змінними, може стати незбуджуваною в критичній точці $\mu\nu = 1$. У наступному розділі ми розвинемо ідею про порушення симетрії шляхом введення двох можливих варіантів первинно-проміжних польових змінних у явному вигляді.

11. Два варіанти первинно-проміжних польових змінних [71]

Симетрія між двома підмножинами проміжних польових змінних $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ та $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ допускає, що замінюючи ту чи іншу підмножину на її первинний двійник, ми можемо оперувати з будьяким з двох наборів $q_+(n)$, $r_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ чи $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ змішаних первинно-проміжних польових змінних окремо на однакових правах.

Розглянемо спочатку перший варіант первинно-проміжних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$. Аби переформулювати динамічну систему в термінах цих змінних, ми маємо одержати відповідні представлення для мінус-мічених основних полів $q_-(n)$, $r_-(n)$ та супутніх полів $\mu(n)$, $\nu(n)$, а також для величини $\exp[+\rho(n)]$. Для цього зручно скористатись співвідношеннями

$$ \frac{q_-(n) + \mu(n)q_+(n)}{1 + q_+(n)r_+(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)\mathrm{u}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \quad (11.1) $$

$$ \frac{r_-(n) + \nu(n)r_+(n)}{1 + q_+(n)r_+(n)} = \frac{(1 - \mu\nu)\mathrm{v}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \quad (11.2) $$

сумісними з формулами перетворень (10.1)–(10.4) і (10.6)–(10.11), розглянутих в розділі 10. Належні обчислювання приводять до таких представлень

$$ q_-(n) = \\ = \frac{(1 - \mu\nu)\mathrm{u}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} - \mu\, q_+(n)\frac{1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \quad (11.3) $$

$$ r_-(n) = \\ = \frac{(1 - \mu\nu)\mathrm{v}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} - \nu\, r_+(n)\frac{1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \quad (11.4) $$

$$ \mu(n) = \frac{(1 - \mu\nu)\mathrm{u}_-(n)r_+(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} + \mu\,\frac{1 + \mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \quad (11.5) $$

$$\nu(n) = \frac{(1-\mu\nu)q_+(n)\mathrm{v}_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)} + \nu\,\frac{1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}, \tag{11.6}$$

$$\exp[+\rho(n)] = [1+q_+(n)r_+(n)]\,\frac{1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}. \tag{11.7}$$

Обираючи другий варіант первинно-проміжних польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$, нам належить одержати відповідні представлення для плюс-мічених основних полів $q_+(n)$, $r_+(n)$ і супутніх полів $\mu(n)$, $\nu(n)$, а також для величини $\exp[+\rho(n)]$. Для цього варто використати співвідношення

$$\frac{q_+(n)+\nu(n)q_-(n)}{1+q_-(n)r_-(n)} = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{u}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.8}$$

$$\frac{r_+(n)+\mu(n)r_-(n)}{1+q_-(n)r_-(n)} = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.9}$$

що є сумісні з формулами перетворень (10.1)–(10.4) і (10.6)–(10.11), розглянутих в розділі 10. Належні обчислювання приводять до таких представлень

$$q_+(n) = \\ = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{u}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)} - \nu\,q_-(n)\frac{1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.10}$$

$$r_+(n) = \\ = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)} - \mu\,r_-(n)\frac{1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.11}$$

$$\mu(n) = \frac{(1-\mu\nu)q_-(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)} + \mu\,\frac{1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.12}$$

$$\nu(n) = \frac{(1-\mu\nu)\mathrm{u}_+(n)r_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)} + \nu\,\frac{1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}, \tag{11.13}$$

$$\exp[+\rho(n)] = [1+q_-(n)r_-(n)]\,\frac{1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}. \tag{11.14}$$

Звертаючись до формул (11.3)–(11.7) і (11.10)–(11.14), що запроваджують, відповідно, перший та другий варіанти первинно-проміжних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ та $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$, ми явно бачимо, що обидва альтернативні вирази (11.7) та (11.14) для величини $\exp[+\rho(n)]$ є факторизовані. Таке спостереження подає нам чітку вказівку, як в цілісній динамічній системі виокремити дві строго означені підсистеми. До того ж кожна з формул (11.7) чи (11.14) для величини $\exp[+\rho(n)]$ чітко розкриває нам характер збуджень в обох задіяних підсистемах. Отже, при докритичних значеннях $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$ обидві підсистеми є аналогічні до систем зі світлими збудженнями, і величину $\rho(n)$ належить трактувати як повну густину світлих збуджень в обох підсистемах. З іншого боку, в надкритичній області $\mu\nu > 1$ підсистема, описувана первинними польовими змінними, залишається підсистемою зі збудженнями світлого типу, тоді як підсистема, пов'язана з проміжними польовими змінними, перетворюється на підсистему зі збудженнями темного типу. В самій критичній точці $\mu\nu = 1$ уся система зсідається до єдиної підсистеми зі збудженнями світлого типу.

Треба зауважити, що використані тут терміни "світлі нелінійні збудження" і "темні нелінійні збудження" слід розуміти за аналогією з термінами "світлі солітони" і "темні солітони", типовими для нелінійної оптики [28].

12. Фундаментальні дужки Пуассона для кожного з варіантів первинно-проміжних польових змінних [71]

Тепер саме час підтвердити, що строге виокремлення на дві підсистеми, про яке було заявлено вище, зумовлено головними властивостями фундаментальних дужок Пуассона, пов'язаних з кожним окремим варіантом первинно-проміжних польових змінних. Ми опустимо тут всі обчислювання, зроблені на основі формул для дужок Пуассона між первинними полями (8.18)–(8.32) та між проміжними полями (10.13)–(10.18), а також на основі низки допоміжних формул та формул перетворення, наведених в попередньому розділі. Отже розглянемо лише кінцеві результати.

Так, перший варіант первинно-проміжних польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$, $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$ характеризується такими фундаментальними дужками Пуассона

$$\{q_+(m), r_+(n)\} = \mathrm{i}\,[1+q_+(n)r_+(n)]\delta_{nm}, \tag{12.1}$$

$$\{q_+(m), q_+(n)\} = 0 = \{r_+(m), r_+(n)\}, \tag{12.2}$$

$$\{q_+(m), \mathrm{v}_-(n)\} = 0 = \{q_+(m), \mathrm{u}_-(n)\}, \tag{12.3}$$

$$\{\mathrm{u}_-(m), r_+(n)\} = 0 = \{\mathrm{v}_-(m), r_+(n)\}, \tag{12.4}$$

$$\{\mathrm{u}_-(m), \mathrm{u}_-(n)\} = 0 = \{\mathrm{v}_-(m), \mathrm{v}_-(n)\}, \tag{12.5}$$

$$\{\mathrm{u}_-(m), \mathrm{v}_-(n)\} = = \frac{\mathrm{i}}{1-\mu\nu}\,[1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)][1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]\delta_{nm}. \tag{12.6}$$

Аналогічно фундаментальні дужки Пуассона для другого варіанта первинно-проміжних польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$, $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$ задаються виразами

$$\{q_-(m), r_-(n)\} = \mathrm{i}\,[1+q_-(n)r_-(n)]\delta_{nm}, \tag{12.7}$$

$$\{q_-(m), q_-(n)\} = 0 = \{r_-(m), r_-(n)\}, \tag{12.8}$$

$$\{q_-(m), \mathrm{v}_+(n)\} = 0 = \{q_-(m), \mathrm{u}_+(n)\}, \tag{12.9}$$

$$\{\mathrm{u}_+(m), r_-(n)\} = 0 = \{\mathrm{v}_+(m), r_-(n)\}, \tag{12.10}$$

$$\{\mathrm{u}_+(m), \mathrm{u}_+(n)\} = 0 = \{\mathrm{v}_+(m), \mathrm{v}_+(n)\}, \tag{12.11}$$

$$\{\mathrm{u}_+(m), \mathrm{v}_+(n)\} = = \frac{\mathrm{i}}{1-\mu\nu}\,[1+\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)][1+\mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)]\delta_{nm}. \tag{12.12}$$

Кожен з двох вищенаведених наборів (12.1)–(12.6) та (12.7)–(12.12) фундаментальних дужок Пуассона чітко демонструє повне виокремлення між підсистемами різного походження.

Накопичених результатів стосовно відокремлення польових змінних і досвіду з канонізування інших напівдискретних нелінійних систем [32, 55, 56, 59] цілком достатньо для того, аби сформулювати нелінійні перетворення, що канонізують досліджувану інтеґровну нелінійну систему (1.1)–(1.6).

13. Два варіанти канонічних польових змінних [71, 72]

Задача канонізування системи полягає у віднайденні такого набору уніфікованих польових змінних ${}_c\mathrm{y}_1(n)$, ${}_c\mathrm{y}_2(n)$, ${}_c\mathrm{y}_3(n)$, ${}_c\mathrm{y}_4(n)$, щоби єдиними ненульовими елементами структурної матриці, які постають в рівняннях Гамільтона (8.1), були елементи, задані співвідношеннями ${}_c\mathrm{J}_{13}(n|m) = -\mathrm{i}\delta_{nm}$, ${}_c\mathrm{J}_{24}(n|m) = -\mathrm{i}\delta_{nm}$, ${}_c\mathrm{J}_{31}(n|m) = +\mathrm{i}\delta_{nm}$, ${}_c\mathrm{J}_{42}(n|m) = +\mathrm{i}\delta_{nm}$. Враховуючи факт точної розщепности системи на первинну та проміжну підсистеми, слушно формалізувати останній крок процедури канонізування у вигляді підхожих нелінійних масштабних перетворень первинно-проміжних польових змінних.

Беручи до уваги, що величини $\ln[1+q_+(n)r_+(n)]$ та $\ln[1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)] - \ln[1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)]$ в докритичній області $\mu\nu < 1$ є пов'язані з густинами збуджень, відповідно, в плюс-міченій первинній підсистемі і мінус-міченій проміжній підсистемі, ми введемо нові (фізично коректні) польові амплітуди $Q_+(n)$, $R_+(n)$ і $U_-(n)$, $V_-(n)$ за допомогою наступних формул перетворення

$$Q_+(n) = q_+(n)\sqrt{\frac{\ln[1+q_+(n)r_+(n)]}{q_+(n)r_+(n)}}, \tag{13.1}$$

$$R_+(n) = r_+(n)\sqrt{\frac{\ln[1+q_+(n)r_+(n)]}{q_+(n)r_+(n)}} \tag{13.2}$$

і

$$U_-(n) = \frac{\mathrm{u}_-(n)}{\sqrt{\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}}\sqrt{\ln\frac{1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}}, \tag{13.3}$$

$$V_-(n) = \frac{\mathrm{v}_-(n)}{\sqrt{\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}}\sqrt{\ln\frac{1+\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}{1+\mu\nu\,\mathrm{u}_-(n)\mathrm{v}_-(n)}}. \tag{13.4}$$

Тут, як бачимо, область значень для величини $Q_+(n))R_+(n)$ обмежено нерівністю $Q_+(n)R_+(n) \geq \geq 0$ за будь-якого допустимого значення $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$. На противагу, область значень для величини $U_-(n)V_-(n)$ обмежено послідовністю нерівностей $\ln(1/\mu\nu) \geq U_-(n)V_-(n) \geq 0$, якщо $\mu\nu < 1$, і послідовністю нерівностей $0 \geq \geq U_-(n)V_-(n) \geq \ln(1/\mu\nu)$, якщо $\mu\nu > 1$. З міркувань практичного застосування праві частини останніх двох виразів (13.3) і (13.4) доцільно переписати безпосередньо в термінах первинних польових змінних і одержати

$$U_-(n) = \frac{q_-(n) + \mu(n)q_+(n)}{\sqrt{[q_-(n) + \mu(n)q_+(n)][r_-(n) + \nu(n)r_+(n)]}} \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_+(n)r_+(n)]}}, \quad (13.5)$$

$$V_-(n) = \frac{r_-(n) + \nu(n)r_+(n)}{\sqrt{[q_-(n) + \mu(n)q_+(n)][r_-(n) + \nu(n)r_+(n)]}} \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_+(n)r_+(n)]}}. \quad (13.6)$$

Розрахунки показують, що фундаментальні дужки Пуассона, пов'язані з польовими змінними $Q_+(n)$, $R_+(n)$ і $U_-(n)$, $V_-(n)$, і справді є канонічні

$$\{Q_+(m), R_+(n)\} = \mathrm{i}\,\delta_{nm}, \quad (13.7)$$

$$\{Q_+(m), Q_+(n)\} = 0 = \{R_+(m), R_+(n)\}, \quad (13.8)$$

$$\{Q_+(m), V_-(n)\} = 0 = \{Q_+(m), U_-(n)\}, \quad (13.9)$$

$$\{U_-(m), R_+(n)\} = 0 = \{V_-(m), R_+(n)\}, \quad (13.10)$$

$$\{U_-(m), U_-(n)\} = 0 = \{V_-(m), V_-(n)\}, \quad (13.11)$$

$$\{U_-(m), V_-(n)\} = \mathrm{i}\,\delta_{nm}. \quad (13.12)$$

Завдяки властивостям $Q_+(n)R_+(n) \geq 0$, $\ln(1/\mu\nu) \geq U_-(n)V_-(n) \geq 0$, чинним при $\mu\nu < 1$, та властивостям $Q_+(n)R_+(n) \geq 0$, $0 \geq U_-(n)V_-(n) \geq$ $\geq \ln(1/\mu\nu)$, чинним при $\mu\nu > 1$, канонічну підсистему, описувану польовими амплітудами $Q_+(n)$ і $R_+(n)$, можна назвати сильною підсистемою, тоді як канонічну підсистему, описувану польовими амплітудами $U_-(n)$ і $V_-(n)$, – слабкою. Сильна підсистема відповідає світлим нелінійним збудженням за усих допустимих значень $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$. Навпаки, слабка підсистема зазнає переходу від підсистеми зі світлими збудженнями до підсистеми з темними збудженнями, коли фоновий параметр $\mu\nu$ переходить крізь критичну точку $\mu\nu = 1$ від докритичних $\mu\nu < 1$ до надкритичних $\mu\nu > 1$ значень. У самій критичній точці $\mu\nu = 1$ підсистема слабких збуджень стає абсолютно незбуджуваною і тому повністю зникає з динаміки системи. Взаємна симетрія між сильною і слабкою підсистемами, вочевидь, є цілком порушена при усих ненульових значеннях фонового параметра, і лише за умови $\mu\nu = 0$ ми приходимо до повністю симетричного випадку, рівнозначного до розглянутих в наших раніших роботах [59, 65].

Щойно описаний варіант канонізації виникає з польових змінних $q_+(n)$, $r_+(n)$ і $\mathrm{u}_-(n)$, $\mathrm{v}_-(n)$, де проміжну підсистему позначено нижнім індексом мінус. З цієї причини називатимемо цю канонізацію мінус-асиметричною.

З іншого боку, варіант канонізації, виниклий з польових змінних $q_-(n)$, $r_-(n)$ і $\mathrm{u}_+(n)$, $\mathrm{v}_+(n)$, ми називатимемо плюс-асиметричною канонізацією.

Формули перетворення, що відповідають за плюс-асиметричну канонізацію, введемо наступним чином

$$Q_-(n) = q_-(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_-(n)r_-(n)]}{q_-(n)r_-(n)}}, \quad (13.13)$$

$$R_-(n) = r_-(n) \sqrt{\frac{\ln[1 + q_-(n)r_-(n)]}{q_-(n)r_-(n)}} \quad (13.14)$$

і

$$U_+(n) = \frac{\mathrm{u}_+(n)}{\sqrt{\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}}, \quad (13.15)$$

$$V_+(n) = \frac{\mathrm{v}_+(n)}{\sqrt{\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}} \sqrt{\ln \frac{1 + \mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}{1 + \mu\nu\,\mathrm{u}_+(n)\mathrm{v}_+(n)}} \quad (13.16)$$

з практичними версіями останніх двох виразів (13.15) і (13.16), заданими формулами

$$U_+(n) = \frac{q_+(n) + \nu(n)q_-(n)}{\sqrt{[q_+(n) + \nu(n)q_-(n)][r_+(n) + \mu(n)r_-(n)]}} \sqrt{\ln \frac{1 + \mu(n)\nu(n) + q_+(n)r_+(n) + q_-(n)r_-(n)}{(1 + \mu\nu)[1 + q_-(n)r_-(n)]}}, \quad (13.17)$$

$$V_{+}(n)=\frac{r_{+}(n)+\mu(n)r_{-}(n)}{\sqrt{[q_{+}(n)+\nu(n)q_{-}(n)][r_{+}(n)+\mu(n)r_{-}(n)]}}\sqrt{\ln\frac{1+\mu(n)\nu(n)+q_{+}(n)r_{+}(n)+q_{-}(n)r_{-}(n)}{(1+\mu\nu)[1+q_{-}(n)r_{-}(n)]}}. \quad (13.18)$$

Область значень для величини $Q_{-}(n))R_{-}(n)$ обмежено нерівністю $Q_{-}(n)R_{-}(n)\geq 0$ за будь-якого допустимого значення $\mu\nu\geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, тоді як область значень для величини $U_{+}(n)V_{+}(n)$ обмежено послідовністю нерівностей $\ln(1/\mu\nu)\geq U_{+}(n)V_{+}(n)\geq 0$, якщо $\mu\nu<1$, і послідовністю нерівностей $0\geq U_{+}(n)V_{+}(n)\geq \ln(1/\mu\nu)$, якщо $\mu\nu>1$.

Що ж стосується фундаментальних дужок Пуассона

$$\{Q_{-}(m),R_{-}(n)\}=\mathrm{i}\,\delta_{nm}, \quad (13.19)$$

$$\{Q_{-}(m),Q_{-}(n)\}=0=\{R_{-}(m),R_{-}(n)\}, \quad (13.20)$$

$$\{Q_{-}(m),V_{+}(n)\}=0=\{Q_{-}(m),U_{+}(n)\}, \quad (13.21)$$

$$\{U_{+}(m),R_{-}(n)\}=0=\{V_{+}(m),R_{-}(n)\}, \quad (13.22)$$

$$\{U_{+}(m),U_{+}(n)\}=0=\{V_{+}(m),V_{+}(n)\}, \quad (13.23)$$

$$\{U_{+}(m),V_{+}(n)\}=\mathrm{i}\,\delta_{nm}, \quad (13.24)$$

пов'язаних з польовими змінними $Q_{-}(n)$, $R_{-}(n)$ і $U_{+}(n)$, $V_{+}(n)$, то вони, як бачимо, є канонічні.

З огляду на явну *mutatis mutandis* відповідність з мінус-асиметричним випадком ми не повторюємо тут усих арґументів стосовно виокремлення відповідних сильної та слабкої підсистем всередині плюс-асиметрично канонізованої системи і не пояснюємо ще раз подробиць ефекту кросовера в критичній точці $\mu\nu=1$ окремо для неї.

14. Гамільтонове формулювання системи в термінах канонічних польових змінних з порушеною симетрією [70–72]

Аби переформулювати досліджувану інтеґровну нелінійну систему (1.1)–(1.6) до її канонічного виду, ми маємо знати вирази для первинних польових змінних $q_{+}(n)$, $r_{+}(n)$, $q_{-}(n)$, $r_{-}(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$, заданих у термінах канонічних змінних $Q_{+}(n)$, $R_{+}(n)$, $U_{-}(n)$, $V_{-}(n)$ або $Q_{-}(n)$, $R_{-}(n)$, $U_{+}(n)$, $V_{+}(n)$.

Розглянемо спочатку випадок мінус-асиметричних канонічних полів $Q_{+}(n)$, $R_{+}(n)$ і $U_{-}(n)$, $V_{-}(n)$. Так, обернувши формули перетворення (13.1)–(13.4), ми в змозі записати первинно-проміжні польові змінні $q_{+}(n)$, $r_{+}(n)$ та $\mathrm{u}_{-}(n)$, $\mathrm{v}_{-}(n)$ в термінах мінус-асиметричних канонічних змінних $Q_{+}(n)$, $R_{+}(n)$ та $U_{-}(n)$, $V_{-}(n)$, відповідно. Одержані вирази належить підставити до формул перетворення (11.3)–(11.6) для вкороченого набору первинних полів $q_{-}(n)$, $r_{-}(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$. В результаті ми приходимо до таких формул оберненого перетворення

$$q_{+}(n)=Q_{+}(n)\sqrt{\frac{\exp[+Q_{+}(n)R_{+}(n)]-1}{Q_{+}(n)R_{+}(n)}}, \quad (14.1)$$

$$r_{+}(n)=R_{+}(n)\sqrt{\frac{\exp[+Q_{+}(n)R_{+}(n)]-1}{Q_{+}(n)R_{+}(n)}} \quad (14.2)$$

і

$$q_{-}(n)=\frac{U_{-}(n)}{\sqrt{U_{-}(n)V_{-}(n)}}\sqrt{\{1-\mu\nu\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]\}\{\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]-1\}}-$$
$$-\mu\,Q_{+}(n)\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]\sqrt{\frac{\exp[+Q_{+}(n)R_{+}(n)]-1}{Q_{+}(n)R_{+}(n)}}, \quad (14.3)$$

$$r_{-}(n)=\frac{V_{-}(n)}{\sqrt{U_{-}(n)V_{-}(n)}}\sqrt{\{1-\mu\nu\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]\}\{\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]-1\}}-$$
$$-\nu\,R_{+}(n)\exp[+U_{-}(n)V_{-}(n)]\sqrt{\frac{\exp[+Q_{+}(n)R_{+}(n)]-1}{Q_{+}(n)R_{+}(n)}}, \quad (14.4)$$

$$\mu(n) = \mu\,\exp[+U_-(n)V_-(n)] + \frac{R_+(n)U_-(n)}{\sqrt{Q_+(n)R_+(n)U_-(n)V_-(n)}} \times$$
$$\times\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_-(n)V_-(n)]\}\{\exp[+U_-(n)V_-(n)]-1\}\{\exp[+Q_+(n)R_+(n)]-1\}}, \tag{14.5}$$

$$\nu(n) = \nu\,\exp[+U_-(n)V_-(n)] + \frac{Q_+(n)V_-(n)}{\sqrt{Q_+(n)R_+(n)U_-(n)V_-(n)}} \times$$
$$\times\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_-(n)V_-(n)]\}\{\exp[+U_-(n)V_-(n)]-1\}\{\exp[+Q_+(n)R_+(n)]-1\}}. \tag{14.6}$$

Схожі міркування у випадку плюс-асиметричних канонічних полів $Q_-(n)$, $R_-(n)$ і $U_+(n)$, $V_+(n)$ породжують наступні формули оберненого перетворення

$$q_-(n) = Q_-(n)\sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)]-1}{Q_-(n)R_-(n)}}, \tag{14.7}$$

$$r_-(n) = R_-(n)\sqrt{\frac{\exp[Q_-(n)R_-(n)]-1}{Q_-(n)R_-(n)}} \tag{14.8}$$

і

$$q_+(n) = \frac{U_+(n)}{\sqrt{U_+(n)V_+(n)}}\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)]\}\{\exp[+U_+(n)V_+(n)]-1\}} -$$
$$-\,\nu\,Q_-(n)\exp[+U_+(n)V_+(n)]\sqrt{\frac{\exp[+Q_-(n)R_-(n)]-1}{Q_-(n)R_-(n)}}, \tag{14.9}$$

$$r_+(n) = \frac{V_+(n)}{\sqrt{U_+(n)V_+(n)}}\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)]\}\{\exp[+U_+(n)V_+(n)]-1\}} -$$
$$-\,\mu\,R_-(n)\exp[+U_+(n)V_+(n)]\sqrt{\frac{\exp[+Q_-(n)R_-(n)]-1}{Q_-(n)R_-(n)}}, \tag{14.10}$$

$$\mu(n) = \mu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)] + \frac{Q_-(n)V_+(n)}{\sqrt{Q_-(n)R_-(n)U_+(n)V_+(n)}} \times$$
$$\times\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)]\}\{\exp[+U_+(n)V_+(n)]-1\}\{\exp[+Q_-(n)R_-(n)]-1\}}, \tag{14.11}$$

$$\nu(n) = \nu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)] + \frac{R_-(n)U_+(n)}{\sqrt{Q_-(n)R_-(n)U_+(n)V_+(n)}} \times$$
$$\times\sqrt{\{1-\mu\nu\,\exp[+U_+(n)V_+(n)]\}\{\exp[+U_+(n)V_+(n)]-1\}\{\exp[+Q_-(n)R_-(n)]-1\}}. \tag{14.12}$$

Означимо Гамільтонові функції ${}_cH_-$ і ${}_cH_+$ мінус-асиметричної канонізованої системи і плюс-асиметричної канонізованої системи, підставивши відповідні формули перетворення (14.1)–(14.6) і (14.7)–(14.12) до виразу (8.6) для Гамільтонової функції ${}_pH$ первинної системи (1.1)–(1.6).

Тоді динаміка мінус-асиметричної канонізованої системи визначатиметься рівняннями Гамільтона

$$+\mathrm{i}\dot{Q}_+(n) = +\mathrm{i}\{{}_cH_-,\, Q_+(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_-}{\partial R_+(n)}, \tag{14.13}$$

$$-\mathrm{i}\dot{R}_+(n) = -\mathrm{i}\{{}_cH_-,\, R_+(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_-}{\partial Q_+(n)}, \tag{14.14}$$

$$+\mathrm{i}\dot{U}_-(n) = +\mathrm{i}\{{}_cH_-,\, U_-(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_-}{\partial V_-(n)}, \tag{14.15}$$

$$-\mathrm{i}\dot{V}_-(n) = -\mathrm{i}\{{}_cH_-,\, V_-(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_-}{\partial U_-(n)}, \tag{14.16}$$

які, вочевидь, мають стандартну канонічну форму завдяки канонічній формі приналежних фундаментальних дужок Пуассона (13.7)–(13.12).

Аналогічно динаміка плюс-асиметричної канонізованої системи визначатиметься такими рівняннями Гамільтона

$$+\mathrm{i}\dot{Q}_-(n) = +\mathrm{i}\{{}_cH_+, Q_-(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_+}{\partial R_-(n)}, \tag{14.17}$$

$$-\mathrm{i}\dot{R}_-(n) = -\mathrm{i}\{{}_cH_+, R_-(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_+}{\partial Q_-(n)}, \tag{14.18}$$

$$+\mathrm{i}\dot{U}_+(n) = +\mathrm{i}\{{}_cH_+, U_+(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_+}{\partial V_+(n)}, \tag{14.19}$$

$$-\mathrm{i}\dot{V}_+(n) = -\mathrm{i}\{{}_cH_+, V_+(n)\} = \frac{\partial\ {}_cH_+}{\partial U_+(n)}, \tag{14.20}$$

в яких враховано канонічні властивості іншого приналежного набору фундаментальних дужок Пуассона (13.19)–(13.24).

15. Сильна та слабка стандартизовані компоненти односолітонного розв'язку [71, 72]

У цьому розділі ми проілюструємо деякі загальні результати, що стосуються асиметричних стандартизацій (13.1)–(13.6) і (13.13)–(13.18) первинної інтеґровної нелінійної системи (1.1)–(1.6) на прикладі односолітонного розв'язку. Для цього ми використаємо формули для односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37) нестандартизованої системи (1.1)–(1.6), заданої на нескінченній стьожці трикутної ґратки і охарактеризованої нелінійностями притягувального типу. Заради стислости викладу ми опустимо верхній (наразі неінформативний) індекс плюс над усима компонентами односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37). Особливої уваги у нашому розгляді буде приділено означенням (5.38)–(5.41) і (5.42) визначальних односолітонних параметрів γ_+, $\varkappa_+$, γ_-, $\varkappa_-$ і s.

Спираючись на означення (5.38)–(5.41) параметрів γ_+, $\varkappa_+$ і γ_-, $\varkappa_-$, можна легко одержати вираз

$$\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)] = (1-\mu\nu)\frac{\sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]} \times$$
$$\times \frac{2\sinh(2\gamma)\sinh(2\gamma) + [\exp(+2\mathrm{i}\varkappa)+\mu][\exp(-2\mathrm{i}\varkappa)+\nu]}{[\exp(+2\gamma+2\mathrm{i}\varkappa)+\mu][\exp(+2\gamma-2\mathrm{i}\varkappa)+\nu][\exp(-2\gamma+2\mathrm{i}\varkappa)+\mu][\exp(-2\gamma-2\mathrm{i}\varkappa)+\nu]}, \tag{15.1}$$

який показує, що знак члена $\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]$ в його лівій частині повністю визначається знаком добутка $(1-\mu\nu)\sinh(2\gamma)$ у правій частині. Зокрема, завдяки такій властивості допоміжні односолітонні компоненти (5.34) і (5.37), обчислені в критичній точці $\mu\nu = 1$, зводяться до своїх граничних постійних значень μ і ν. Саме ця властивість члена $\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]$, як буде показано, і визначає головні характеристики стандартизованих односолітонних компонент.

І справді, застосовуючи формули мінус-асиметричної стандартизації (13.1), (13.2) і (13.5), (13.6) до величин $Q_+(n)R_+(n)$ і $U_-(n)V_-(n)$, обчислених за допомогою нестандартизованого багатокомпонентного односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37), ми одержуємо

$$Q_+(n)R_+(n) = \ln\left\{1 + \frac{\sinh(2\gamma)\sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-x-s)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-x-s)]}\right\}, \tag{15.2}$$

$$U_-(n)V_-(n) = \ln\left\{1 + \frac{\sinh(2\gamma)\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-x-3s+1)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n-x+s)]}\right\}. \tag{15.3}$$

Таким чином, на догоду загальній теорії, величина $Q_+(n)R_+(n)$, будучи обчислена на односолітонному розв'язку, набуває дійсних невід'ємних значень при усих допустимих значеннях $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, і відтак її можна трактувати як число світлих Q_+R_+ збуджень в n-тій елементарній комірці. Ця властивість характеризує солітонну компоненту Q_+R_+ як таку,

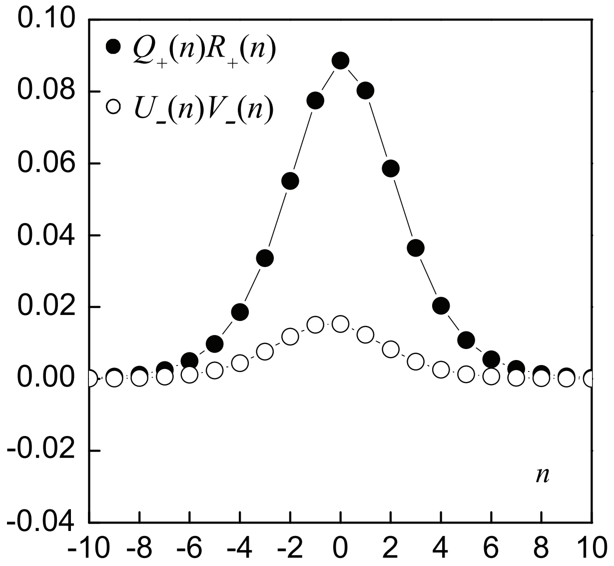

Рис. 6. Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (пусті кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в докритичній області $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено при $\mu = 0.7 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (15.2) та (15.3). Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами світлого типу

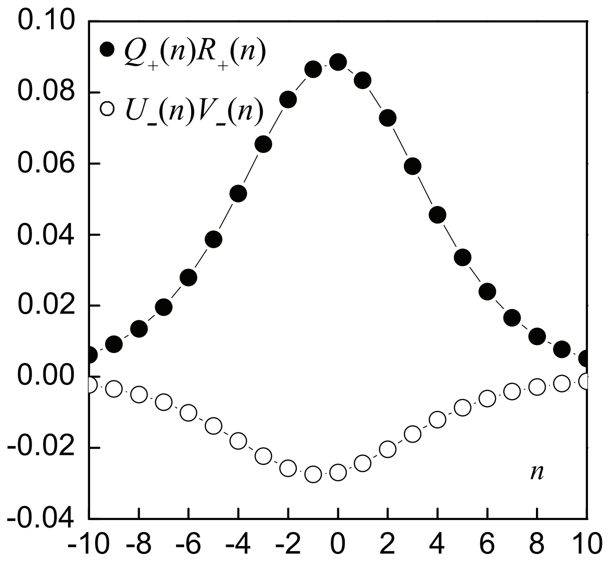

Рис. 7. Типові розподіли сильної $Q_+(n)R_+(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_-(n)V_-(n)$ (пусті кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку мінус-асиметричної стандартизації в надкритичній області $\mu\nu > 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено при $\mu = 1.9 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (15.2) та (15.3). Видно, що слабка солітонна компонента є компонентою темного типу

що належить до сильної підсистеми. Навпаки, знак величини $U_-(n)V_-(n)$, обчисленої на односолітонному розв'язку, як видно, повністю вказується знаком параметра $1 - \mu\nu$, а отже величину $U_-(n)V_-(n)$ можна вважати числом світлих U_-V_- збуджень в n-тій елементарній комірці лише за умови $\mu\nu < 1$. До того ж, в критичній точці $\mu\nu = 1$ компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона зникає повністю. При $\mu\nu > 1$ добуток $U_-(n)V_-(n)$ стає від'ємно напіввизначеним (*тобто* недодатнім), а отже компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона описує темні збудження. Таким чином, компонента U_-V_- мінус-асиметрично стандартизованого солітона проявляє всі властивості, очікувані для слабкої підсистеми згідно із загальною теорією. Рисунки 6 і 7, розраховані за формулами мінус-асиметричної стандартизації (15.2) і (15.3), ілюструють принципову відмінність в спільній поведінці двох взаємно асиметричних односолітонних компонент при докритичних $\mu\nu < 1$ (рис. 6) і надкритичних $\mu\nu > 1$ (рис. 7) значеннях головного фонового параметра $\mu\nu$.

З іншого боку, застосовуючи формули плюс-асиметричної стандартизації (13.13), (13.14) і (13.17), (13.18) до величин $Q_-(n)R_-(n)$ і $U_+(n)V_+(n)$, обчислених за посередництва нестандартизованого багатокомпонентного односолітонного розв'язку (5.32)–(5.37), одержуємо

$$Q_-(n)R_-(n) = \ln\left\{1 + \frac{\sinh(2\gamma)\sinh(2\gamma)}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + s)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + s)]}\right\} \tag{15.4}$$

$$U_+(n)V_+(n) = \ln\left\{1 + \frac{\sinh(2\gamma)\sinh[2(\gamma_+ + \gamma_- - \gamma)]}{\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x + 3s - 1)]\cosh[2(\gamma_+ + \gamma_-)(n - x - s)]}\right\}. \tag{15.5}$$

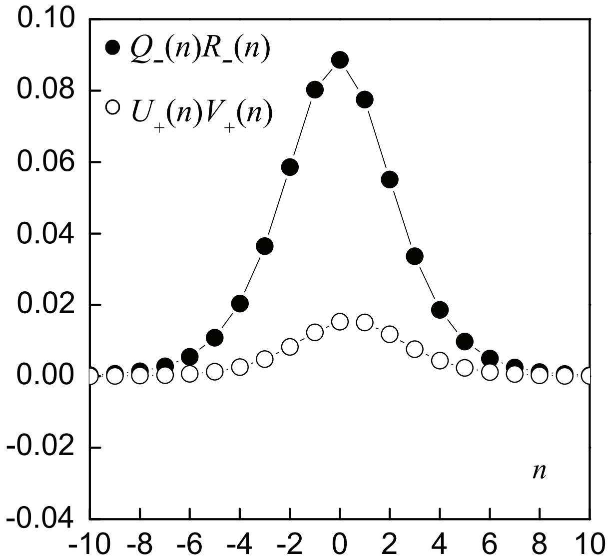

Рис. 8. Типові розподіли сильної $Q_{-}(n)R_{-}(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_{+}(n)V_{+}(n)$ (пусті кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку плюс-асиметричної стандартизації в докритичній області $\mu\nu < 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено при $\mu = 0.7 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (15.4) та (15.5). Видно, що обидві солітонні компоненти є компонентами світлого типу

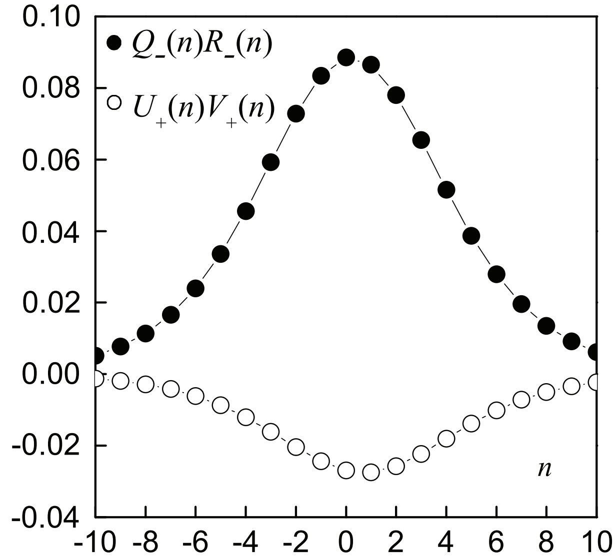

Рис. 9. Типові розподіли сильної $Q_{-}(n)R_{-}(n)$ (заповнені кружки) та слабкої $U_{+}(n)V_{+}(n)$ (пусті кружки) односолітонних компонент за номером елементарної комірки n у випадку плюс-асиметричної стандартизації в надкритичній області $\mu\nu > 1$ фонового параметра $\mu\nu$. Розрахунки зроблено при $\mu = 1.9 = \nu$, $\gamma = 0.15$, $\varkappa = 0$, $x = 0$ згідно з формулами (15.4) та (15.5). Видно, що слабка солітонна компонента є компонентою темного типу

Отже, згідно із загальною теорією величина $Q_{-}(n)R_{-}(n)$, обчислена на односолітонному розв'язку, набуває дійсних невід'ємних значень при усіх допустимих значеннях $\mu\nu \geq 0$ фонового параметра $\mu\nu$, і тому її можна трактувати як число світлих $Q_{-}R_{-}$ збуджень в n-тій елементарній комірці. Ця властивість характеризує солітонну компоненту $Q_{-}R_{-}$ як таку, що належить до сильної підсистеми. Навпаки, знак величини $U_{+}(n)V_{+}(n)$, обчисленої за допомоги односолітонного розв'язку, повністю вказується знаком параметра $1 - \mu\nu$, а відтак величину $U_{+}(n)V_{+}(n)$ можна вважати числом світлих $U_{+}V_{+}$ збуджень в n-тій елементарній комірці лише за умови $\mu\nu < 1$. Більше того, в критичній точці $\mu\nu = 1$ компонента $U_{+}V_{+}$ плюс-асиметрично стандартизованого солітона повністю зникає. При $\mu\nu > 1$ добуток $U_{+}(n)V_{+}(n)$ стає від'ємно напіввизначеним, і тому компонента $U_{+}V_{+}$ плюс-асиметрично стандартизованого солітона описує темні збудження. Отже, компонента $U_{+}V_{+}$ плюс-асиметрично стандартизованого солітона демонструє всі властивості, передбачені для слабкої підсистеми. Рисунки 8 і 9, розраховані за формулами плюс-асиметричної стандартизації (15.4) і (15.5), показують принципову відмінність в спільній поведінці двох взаємно асиметричних односолітонних компонент при докритичних $\mu\nu < 1$ (рис. 8) і надкритичних $\mu\nu > 1$ (рис. 9) значеннях головного фонового параметра $\mu\nu$.

Насамкінець зауважимо, що в критичній точці $\mu\nu = 1$ параметр координатного розщеплення s (5.42) обертається на тотожній нуль з огляду на формулу (15.1) для функціонального параметра $\sinh[2(\gamma_{+}+\gamma_{-}-\gamma)]$. Отже жодної суперечності між мінус-асиметрично стандартизованим солітонним представленням та плюс-асиметрично стандартизованим солітонним представленням не існує. Насправді, саме існування двох нееквівалентних підсистем в будь-якій з двох асиметрично стандартизованих систем відкриває можливість описати критичність системи найбільш природнім чином, а саме – шляхом повного вилучення збуджень слабкої підсистеми в критичній точці.

16. Висновки

У цьому огляді ми підсумовуємо найважливіші властивості напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками з огляду на вагому роль, яку відіграють напівдискретні інтеґровні моделі нелінійного шрьодінґерівського типу в описові різноманітних явищ у багатьох галузях фізики. Список відповідних посилань стосовно застосувань у фізиці можна знайти в наших недавніх публікаціях [67–69]. Вісім оригінальних праць [63, 66–72] складають осердя оглянутих результатів, втім вплив праць зі стандартизації широко відомої напівдискретної нелінійної системи Абловіца–Ладіка [32, 55, 56] видається вкрай незаперечним. Фактично наша діяльність зі стандартизації системи Абловіца–Ладіка [55,56] була інспірована доволі критичним ставленням академіка Олександра Сергійовича Давидова до нестандартних польових амплітуд як таких, що не мають прямого фізичного сенсу [64]. Подібна задача стандартизації, як ми вже знаємо, постає також в напівдискретній інтеґровній нелінійній Шрьодінґеровій системі з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками, але на багато витонченішому рівні [70–72] у порівнянні із задачами стандартизації, які виникають в простих напівдискретних інтеґровних нелінійних системах [51, 55, 56, 59], що характеризуються суто розщепними структурними (симплектичними) матрицями. З одного боку, розщепність структурної матриці вказує на те, що кожен з двох діагональних блоків структурної матриці – це нульова матриця, тоді як кожен з двох позадіагональних блоків структурної матриці – діагональна матриця. З іншого боку, розщепність вимагає аби кожен елемент структурної матриці був заданий польовими змінними, що належать до однієї окремої підсистеми. Жодного універсального рецепту, як одночасно подолати обидва вищезгадані застереженя, не існує. Що ж стосується системи із розщепною структурною матрицею, то задача її канонізації виявляється більш-менш тривіальною (проте іноді і занадто громіздкою). Отже, головна задача в канонізуванні напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками полягала у віднаходженні такого нелінійного перетворення до нових польових змінних аби відповідна структурна матриця стала розщепною. Аби просунутися у виконанні цієї мети ми змушені були здійснити цілу низку логічних кроків. Перш за все, ми знайшли кілька найнижчих локальних густин з нескінченної ієрархії і встановили Пуассонову та Гамільтонову структури системи в термінах первинних польових змінних. Потім, спираючись на так звані природні в'язі, ми виявили критичність системи стосовно фонового параметра. З урахуванням критичности системи ми зуміли ввести набір проміжних польових змінних, а потім два варіанти первинно-проміжних польових змінних. Виявилось, що характерною ознакою кожного варіанту первинно-проміжних польових змінних є розщепність притаманної їм структурної матриці, а отже головну перешкоду для канонізації системи було подолано. В процесі стандартизації ми вияснили, що кожна із стандартизованих систем складається із слабкої і сильної підсистем. На загал симетрія між слабкою підсистемою і сильною підсистемою є суттєво порушена і підлягає відновленню лише за нульової величини фонового параметра. В докритичній області фонового параметра обидві канонічні підсистеми є підсистемами світлих нелінійних збуджень, тоді як в надкритичній області слабка підсистема обертається на підсистему темних нелінійних збуджень. В самій критичній точці слабка підсистема стає перманентно повністю незбуджуваною. Перехід від одного типу нелінійних збуджень до іншого було підтверджено мінус-асиметричним та плюс-асиметричним стандартизованими багатокомпонентними односолітонними розв'язками як аналітично, так і графічно, з урахуванням формул для первинного (нестандартизованого) солітонного розв'язку. Сам же первинний солітонний розв'язок було одержано в рамках достатньо нетривіального методу одягання Дарбу, розвинутого саме для цієї мети.

Ще одна важлива риса напівдискретної інтеґровної нелінійної Шрьодінґерової системи з фоново-реґульовними міжвузловими резонансними зв'язками пов'язана з *a priori* довільними часовими залежностями параметрів поперечного зв'язку, здатними охопити вплив зовнішнього лінійного потенціалу. Як наслідок, первинна нелінійна система з відповідно підлаштованим параметричним розгойдуванням стає ізоморфною системі, яка моделює Блохові (Bloch) осциляції заряджених нелінійних носіїв в стьожці трикутної ґратки внаслідок дії повздовжнього просторово одорідного електричного поля. Обґрунтування такого твердження можна знайти в нашій недавній праці [69].

Працю виконано за підтримки Національної академії наук України в рамках теми № 0115U005302. Автор висловлює подяку Вячеславу О. Вахненку за виконання рисунків 1–9. Автор повністю відповідає за граматику, лексику, наукову термінологію та компонування формул статті.

1. M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations. *J. Math. Phys.* **16**, 598–603 (1975).
2. M.J. Ablowitz, J.F. Ladik. Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis. *J. Math. Phys.* **17**, 1011–1018 (1976).
3. M.J. Ablowitz, Y. Ohta, A.D. Trubatch. On discretizations of the vector nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Lett. A* **253**, 287–304 (1999).
4. M.J. Ablowitz, B. Prinari, A.D. Trubatch. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems* (Cambridge University Press, New York, 2004).
5. M.J. Ablowitz, G. Biondini, B. Prinari. Inverse scattering transform for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions. *Inverse Problems* **23**, 1711–1758 (2007).
6. V.E. Adler, V.V. Postnikov. On vector analogs of the modified Volterra lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 455203 (2008).
7. G. Biondini, D. Kraus. Inverse scattering transform for the defocusing Manakov system with nonzero boundary condirions. *SIAM J. Math. Anal.* **47**, 706–757 (2015).
8. G. Biondini, D.K. Kraus, B. Prinari. The three-component defocusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions. *Commun. Math. Phys.* **348**, 475–533 (2016).
9. L.S. Brizhik, B.M.A.G. Piette, W.J. Zakrzewski. Donor-acceptor electron transport mediated by solitons. *Phys. Rev. E* **90** 052915 (2014).
10. R.K. Bullough, N.M. Bogoliubov, A.V. Rybin, G.G. Varzugin, J. Timonen. Solitons of q-deformed quantum lattices and the quantum soliton. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 10463–10474 (2001).
11. P.J. Caudrey. The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation. *Physica D* **6**, 51–66 (1982).
12. P.J. Caudrey. Differential and discrete spectral problems and their inverses. In: *Wave Phenomena: Modern Theory and Applications*, North-Holland Mathematics Studies **97** (Elsevier, Amsterdam, 1984), pp. 221–232.
13. A.R. Chowdhury, G. Mahato. A Darboux-Bäcklund transformation associated with a discrete nonlinear Schödinger equation. *Lett. Math. Phys.* **7**, 313–317 (1983).
14. D.N. Christodoulides, R.I. Joseph. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt. Lett.* **13**, 794–796 (1988).
15. G. Darboux. Sur le problème de Pfaff. *Bull. Sci. Math. Astron. 2 série* **6**, 14–36 (1882).
16. G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bull. Sci. Math. Astron. 2 série* **6**, 49–68 (1882).
17. А.С. Давыдов. *Теория молекулярных экситонов* (Наука, Москва, 1968); A.S. Davydov. *Theory of Molecular Excitons* (Plenum Press, New York–London, 1971).
18. А.С. Давыдов, А.А. Еремко, А.И. Сергиенко. Солитоны в α-спиральных белковых молекулах. *Укр. Физ. Журн.* **23**, 983–993 (1978).
19. А.С. Давыдов. *Солитоны в молекулярных системах* (Наукова Думка, Київ, 1984); A.S. Davydov. *Solitons in Molecular Systems* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1991).
20. E.V. Doktorov, S.B. Leble. *A Dressing Method in Mathematical Physics* (Springer, Dordrecht, 2007).
21. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Ф. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения* (Наука, Москва, 1986); B.A. Dubrovin, A.F. Fomenko, S.P. Novikov. *Modern Geometry. Methods and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
22. M. Eliashvili, G.I. Japaridze, G. Tsitsishvili, G. Tukhashvili. Edge states in 2D lattices with hopping anisotropy and Chebyshev polynomials. *J. Phys. Soc. Japan* **83**, 044706 (2014).
23. I.L. Garanovich, S. Longhi, A.A. Sukhorukov, Yu.S. Kivshar. Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides. *Phys. Rep.* **518**, 1–79 (2012).
24. В.С. Герджиков, М.И. Иванов. Гамильтонова структура многокомпонентных разностных нелинейных уравнений Шредингера. *Теор. Мат. Физ.* **52**, 89–104 (1982); V.S. Gerdzhikov, M.I. Ivanov. Hamiltonian structure of multicomponent nonliner Schrödinger equations in difference form. *Theor. Math. Phys.* **52**, 676–685 (1982).
25. C.H. Gu, H.S. Hu, Z.X. Zhou. *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry* (Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht–London, 2005).
26. L. Jiao, L. Zhang, X. Wang, G. Diankov, H. Dai. Narrow graphene nanoribbons from carbon nanotubes. *Nature* **458**, 877–880 (2009).
27. F. Kako, N. Mugibayashi. Complete integrability of general nonlinear differential-difference equations solvable by the inverse method. II. *Progr. Theor. Phys.* **61**, 776–790 (1979).
28. Yu.S. Kivshar, B. Luther-Davies. Dark optical solitons: Physics and applications. *Phys. Rep.* **298**, 81–197 (1998).
29. K. Konno, H. Sanuki, Y.H. Ichikawa. Conservation laws of nonlinear-evolution equations. *Progr. Theor. Phys.* **52**, 886–889 (1974).
30. V.V. Konotop, O.A. Chubykalo, L. Vázquez. Dynamics and interaction of solitons on an integrable inhomogeneous lattice. *Phys. Rev. E* **48**, 563–568 (1993).

31. D.V. Kosynkin, A.L. Higginbotham, A. Sinitskii, J.R. Lomeda, A. Dimiev, B.K. Price, J.M. Tour. Longitudinal unzipping of carbon nanotubes to form graphene nanoribbons. *Nature* **458**, 872–876 (2009).
32. P.P. Kulish. Quantum difference nonlinear Schrödinger equation. *Lett. Math. Phys.* **5**, 191–197 (1981).
33. V. Kuznetsov, E. Sklyanin. Bäcklund transformation for the BC-type Toda lattice. *SIGMA* **3**, 080 (2007).
34. С.Б. Лебле, М.А. Салль. Преобразование Дарбу для дискретного аналога уравнений Силина-Тихончука. *Доклады АН СССР* **284**, 110–114 (1985); S.B. Leble, M.A. Sall'. The Darboux transformation for the discrete analog of the Silin-Tikhonchuk equations. *Sov. Phys.–Doklady* **30**, 760–762 (1985).
35. S.B. Leble. *Nonlinear Waves and Waveguides with Stratification* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1991).
36. R.K.F. Lee, B.J. Cox, J.M. Hill. An exact polyhedral model for boron nanotubes. *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 065204 (2009).
37. P. Marquié, J.M. Bilbault, M. Remoissenet. Nonlinear Schrödinger models and modulational instability in real electrical lattices. *Physica D* **87**, 371–374 (1995).
38. B.M. Maschke, A.J. Van Der Schaft, P.C. Breedveld. An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics: Non-standard Poisson structures and gyrators. *J. Franklin Inst.* **329**, 923–966 (1992).
39. V.B. Matveev. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations. I. *Lett. Math. Phys.* **3**, 217–222 (1979).
40. V.B. Matveev, M.A. Salle. Differential-difference evolution equations. II (Darboux transformation for the Toda lattice). *Lett. Math. Phys.* **3**, 425–429 (1979).
41. V.B. Matveev, M.A. Salle. *Darboux Transformations and Solitons* (Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1991).
42. A. Narita, X. Feng, Y. Hernandez, S.A. Jensen, M. Bonn, H. Yang, I.A. Verzhbitskiy, C. Casiraghi, M.R. Hansen, A.H.R. Koch, G. Fytas, O. Ivasenko, B. Li, K.S. Mali, T. Balandina, S. Mahesh, S. De Feyter, K. Müllen. Synthesis of structurally well-defined and liquid-phase-processable graphene nanoribbons. *Nature Chemistry* **6**, 126–132 (2014).
43. G. Neugebauer, R. Meinel. General N-soliton solution of the AKNS class on arbitrary background. *Phys. Lett. A* **100**, 467–470 (1984).
44. A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics* (SIAM Press, Philadelphia, 1985).
45. R. Peierls. Zur theorie des diamagnetismus von leitungselektronen. *Z. Phys.* **80**, 763–791 (1933).
46. A. Rybin, J. Timonen, G. Varzugin, R.K. Bullough. q-deformed solitons and quantum solitons of the Maxwell-Bloch lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 157–164 (2001).
47. R. Scharf, A.R. Bishop. Properties of the nonlinear Schrödinger equation on a lattice. *Phys. Rev. A* **61**, 6535–6544 (1991).
48. A.C. Scott. Dynamics of Davydov solitons. *Phys. Rev. A* **26**, 578–595 (1982).
49. В.П. Силин, В.Т. Тихончук. Параметрическая турбулентность и Черенковское излучение электронов в пространственно неднородной плазме. *Журн. Експ. Теор. Физ.* **81**, 2039–2051 (1981); V.P. Silin, V.T. Tikhonchuk. Parametric turbulence and Cherenkov heating of electrons in a spatially inhomogeneous plasma. *Sov. Phys.–JETP* **54**, 1075–1082 (1981).
50. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. *Гамильтонов подход в теории солитонов* (Наука, Москва, 1986); L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
51. Y. Tang, J. Cao, X. Liu, Y. Sun. Symplectic methods for the Ablowitz-Ladik discrete nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 2425–2437 (2007).
52. T. Tsuchida, H. Ujino, M. Wadati. Integrable semi-discretization of the coupled modified KdV equations. *J. Math. Phys.* **39**, 4785–4813 (1998).
53. T. Tsuchida, H. Ujino, M. Wadati. Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 2239–2262 (1999).
54. G.-Z. Tu. A trace identity and its applications to the theory of discrete integrable systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 3903–3922 (1990).
55. О.О. Вахненко. Нова повністю інтеґровра дискретизація нелінійного рівняння Шрьодінґера. *Укр. Фіз. Журн.* **40**, 118–122 (1995).
56. O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko. Physically corrected Ablowitz-Ladik model and its application to the Peierls-Nabarro problem. *Phys. Lett. A* **196**, 307–312 (1995).
57. O.O. Vakhnenko. Nonlinear beating excitations on ladder lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 5735–5748 (1999).
58. O.O. Vakhnenko, M.J. Velgakis. Transverse and longitudinal dynamics of nonlinear intramolecular excitations on multileg ladder lattices. *Phys. Rev. E* **61**, 7110–7120 (2000).
59. O.O. Vakhnenko. Solitons on a zigzag-runged ladder lattice. *Phys. Rev. E* **64**, 067601 (2001).
60. O.O. Vakhnenko. Solitons in parametrically driven discrete nonlinear Schrödinger systems with the exploding range of intersite interactions. *J. Math. Phys.* **43**, 2587–2605 (2002).
61. O.O. Vakhnenko. Three component nonlinear dynamical system generated by the new third-order discrete spectral operator. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 5405–5430.
62. O.O. Vakhnenko. A discrete nonlinear model of three coupled dynamical fields integrable by the Caudrey method. *Ukr. J. Phys.* **48**, 653–666 (2003).
63. O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear ladder system with background-controlled intersite resonant coupling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 11013–11027 (2006).
64. O.O. Vakhnenko. Enigma of probability amplitudes in Hamiltonian formulation of integrable semidiscrete nonlinear Schrödinger systems. *Phys. Rev. E* **77**, 026604 (2008).
65. O.O. Vakhnenko. Inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger system on a zigzag-runged ladder lattice. *J. Math. Phys.* **51**, 103518 (2010).

66. O.O. Vakhnenko. Semidiscrete integrable nonlinear systems generated by the new fourth-order spectral operator. Local conservation laws. *J. Nonlin. Math. Phys.* **18**, 401–414 (2011).
67. O.O. Vakhnenko. Integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *J. Phys. Soc. Japan* **84**, 014003 (2015).
68. O.O. Vakhnenko. Nonlinear integrable model of Frenkel-like excitations on a ribbon of triangular lattice. *J. Math. Phys.* **56**, 033505 (2015).
69. O.O. Vakhnenko. Coupling-governed metamorphoses of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Phys. Lett. A* **380**, 2069–2074 (2016).
70. O.O. Vakhnenko. Asymmetric canonicalization of the integrable nonlinear Schrödinger system on a triangular-lattice ribbon. *Appl. Math. Lett.* **64**, 81–86 (2017).
71. O.O. Vakhnenko. Symmetry-broken canonizations of the semi-discrete integrable nonlinear Schrödinger system with background-controlled intersite coupling. *J. Math. Phys.* **57**, 113504 (2016).
72. O.O. Vakhnenko. Distinctive features of the integrable nonlinear Schrödinger system on a ribbon of triangular lattice. *Ukr. J. Phys.* **62**, 271–282 (2017).
73. V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals* **45**, 846–852 (2012).
74. V.E. Vekslerchik, V.V. Konotop. Discrete nonlinear Schrödinger equation under non-vanishing boundary conditions. *Inverse Problems* **8**, 889–909 (1992).
75. M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno. Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws. *Progr. Theor. Phys.* **53**, 419–436 (1975).
76. X.-Y. Wen. New hierarchies of integrable lattice equations and associated properties: Darboux transformation, conservation laws and integrable coupling. *Rep. Math. Phys.* **67**, 259–277 (1975).
77. X.-X. Xu. Darboux transformation of a coupled lattice soliton equation. *Phys. Lett. A* **362**, 205–211 (2007).
78. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн. *Усп. Физ. Наук* **167**, 1137–1167 (1997); V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Phys.–Uspekhi* **40**, 1087–1116 (1997).
79. J.M. Ziman. *Models of disorder. The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).

Одержано 11.11.17

O.O. Vakhnenko

SEMIDISCRETE INTEGRABLE NONLINEAR SCHRÖDINGER SYSTEM WITH BACKGROUND-DEPENDENT INTERSITE INTERACTION

S u m m a r y

We summarize the most featured items characterizing the semi-discrete nonlinear Schrödinger system with background-controlled inter-site resonant coupling. The system is shown to be integrable in the Lax sense that make it possible to obtain its soliton solutions in the framework of properly parameterized dressing procedure based on the Darboux transformation. On the other hand the system integrability inspires an infinite hierarchy of local conservation laws some of which were found explicitly in the framework of generalized recursive approach. The system consists of two basic dynamic subsystems and one concomitant subsystem and it permits the Hamiltonian formulation accompanied by the highly nonstandard Poisson structure. The nonzero background level of concomitant fields mediates the appearance of an additional type of inter-site resonant coupling and as a consequence it establishes the triangular-lattice-ribbon spatial arrangement of location sites for the basic field excitations. Adjusting the background parameter we are able to switch over the system dynamics between two essentially different regimes separated by the critical point. The system criticality against the background parameter is manifested both indirectly by the auxiliary linear spectral problem and directly by the nonlinear dynamical equations themselves. The physical implications of system criticality become evident after the rather sophisticated canonization procedure of basic field variables. There are two variants of system standardization equal in their rights. Each variant is realizable in the form of two nonequivalent canonical subsystems. The broken symmetry between canonical subsystems gives rise to the crossover effect in the nature of excited states. Thus in the under-critical region the system support the bright excitations in both subsystems, while in the over-critical region one of subsystems converts into the subsystem of dark excitations.