Р.М. ПЛЯЦКО, М.Т. ФЕНИК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
(Вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060; e-mail: plyatskor@gmail.com)

УДК 539

ПРО РЕАКЦІЮ СПІНОВОЇ ЧАСТИНКИ НА КРИВИНУ ПРОСТОРУ-ЧАСУ [1]

Проаналізовано реакцію класичної (неквантової) спінової частинки на кривину простору-часу згідно з рівняннями Матісона–Папапетру. З точки зору спостерігача, супутнього до частинки у полі Шварцшильда, вона визначається гравітомагнітними компонентами гравітаційного поля. Величини цих компонент суттєво залежать від релятивістського фактора Лоренца, обчисленого за швидкістю частинки відносно шварцшильдівської маси. Як наслідок, прискорення спінової частинки відносно геодезичного руху є пропорційним до квадрата фактора Лоренца. Водночас інтенсивність електромагнітного випромінювання зарядженої спінової частинки пропорційна до четвертого степеня цього фактора.

Ключові слова: спінова частинка, рівняння Матісона–Папапетру, поле Шварцшильда, сильна спін-гравітаційна взаємодія.

1. Вступ

У загальній теорії відносності існують два підходи для опису поведінки спінової частинки в гравітаційному полі. Перший був започаткований В. Фоком, Д. Іваненком і Г. Вейлем у 1929 р., коли звичайне рівняння Дірака узагальнили на викривлений простір-час [1–3]. Другий, класичний (неквантовий) підхід запропонував М. Матісон [4]. Значно пізніше було показано, що у певному сенсі класичні рівняння випливають із загальнорелятивістського рівняння Дірака як його класичне наближення [5, 6]. Після Матісона такі ж рівняння для макроскопічного спінового пробного тіла (частинки) вивів А. Папапетру іншим методом [7]. Тому тепер ці рівняння відомомі як рівняння Матісона–Папапетру (МП).

У центрі уваги цієї статті є рівняння МП як важливе джерело знань про реакцію спінової частинки на кривину простору-часу, що проявляється у властивостях руху частинки у полі Шварцшільда. У розділі 2 представлено рівняння МП і деякі їхні наслідки. Залежність спін-гравітаційної взаємодії від швидкості частинки розглянуто у розділі 3. Оцінку інтенсивності електромагнітного випромінювання для зарядженої спінової частинки подано у розділі 4. Деякі числові оцінки для електронів, протонів і нейтрино наведено у розділі 5. Висновки містить розділ 6.

2. Рівняння Матісона–Папапетру

Початкова форма запису рівнянь МП є такою [4]:

$$\frac{D}{ds}\left(mu^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds}\right) = -\frac{1}{2}u^\pi S^{\rho\sigma} R^\lambda{}_{\pi\rho\sigma}, \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \tag{2}$$

$$S^{\lambda\nu}u_\nu = 0, \tag{3}$$

де $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ є вектором 4-швидкості частинки, $S^{\mu\nu}$ – антисиметричний тензор спіну, m і D/ds – відповідно маса і коваріянтна похідна вздовж u^λ. Тут і надалі грецькі індекси пробігають значення 1, 2, 3, 4, а латинські – 1, 2, 3; прийнято сиґнатуру метрики (–, –, –, +) і систему одиниць $c = G = 1$. Співвідношення (3) відіграє роль доповняльної умови для рівнянь (1), (2) і її фізичний зміст полягає у виборі центра маси спінової частинки. Часто замість (3) використовують інше співвідношення

$$S^{\lambda\nu}P_\nu = 0,$$

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції “XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics.”

де P_ν є 4-вектором імпульсу. В лінійному за спіном наближенні P_ν пропорційний до u_ν.

Рівняння (1)–(3) мають інтеграл руху

$$S_0^2 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \tag{4}$$

де $|S_0|$ є абсолютною величиною спіну. Необхідно брати до уваги фізичну умову

$$\frac{|S_0|}{mr} \equiv \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

де r є характерною просторовою довжиною (зокрема, в метриці Шварцшильда r є радіальною координатою) [11].

Важливо, що рівняння МП можна застосовувати для дослідження рухів спінової частинки з довільною швидкістю відносно джерела гравітаційного поля (наприклад, відносно шварцшильдівської або керрівської маси) аж до швидкості світла, подібно до того як рівняння геодезичних ліній використовуються для опису швидких безспінових частинок.

Перші ефекти спін-гравітаційної взаємодії, що випливають із рівнянь МП у полі Шварцшильда, розглянуто в [8]. Згідно з результатами цієї статті вплив спіну на траєкторію частинки є надто малим для його практичної реєстрації. Аналогічний висновок сформульовано у відомій монографії [9]. Тим не менше, інше припущення можна знайти в [10]: "Простий акт надання чорній дірі кутового моменту привів до неочікуваного багатства можливих фізичних явищ. Слушним є питання, чи не може надання пробному тілу внутрішнього обертання також привести до несподіванок". Ця стаття поряд з [11], де проаналізовано спін-спінову і спін-орбітальну взаємодії, дали поштовх до реалізації програми повніших досліджень фізичних ефектів, які випливають з рівнянь МП, без апріорних обмежень на ступінь впливу спіну частинки на її траєкторію. Одні з перших результатів реалізації цієї програми були представлені в [12]. Було показано, що особливі ситуації з рухами спінової частинки виникають за умов, коли її швидкість стає близькою до швидкості світла [12–14].

У випадку, коли $S^{\mu\nu} = 0$, рівняння (1)–(3) зводяться до рівнянь геодезичних ліній. У лінійному за спіном наближенні член у правій частині рівняння (1) визначає основний вклад спіну частинки у відхилення її руху від геодезичного, тобто реакцію частинки на кривину простору-часу.

Доцільно розглядати рівняння МП у їх зображенні в термінах локальних (тетрадних) величин, які відповідають ситуації, коли спостерігач рухається разом із спіновою частинкою. У лінійному за спіном наближенні з рівнянь МП випливає співвідношення [14, 16]

$$\gamma_{(i)(4)(4)} = -\frac{S_{(1)}}{m} R_{(i)(4)(2)(3)}, \tag{6}$$

де $\gamma_{(k)(1)(4)}$ – коефіцієнти обертання Річчі, а перший локальний вектор (1) орієнтований вздовж 3-вектора спіну (це означає, що $S_{(2)} = 0$, $S_{(3)} = 0$). Величина $\gamma_{(i)(4)(4)}$ є динамічною характеристикою системи відліку, а саме її прискоренням. Тобто, згідно з (6) маємо

$$a_{(i)} = -\frac{S_{(1)}}{m} R_{(i)(4)(2)(3)}, \tag{7}$$

де $a_{(i)}$ є 3-прискоренням, з яким спінова частинка відхиляється від геодезичного вільного падіння за оцінкою супутнього спостерігача. У наступному розділі проаналізуємо вираз (7) за різної швидкості частинки відносно шварцшильдівського джерела гравітаційного поля.

3. Роль дуже високої швидкості частинки

Для розуміння важливості ролі швидкості спінової частинки у спін-гравітаційній взаємодії розглянемо вираз для гравітомагнітних компонени $B^{(i)}_{(k)}$ гравітаційного поля у конкретному випадку, коли спінова частинка рухається у гравітаційному полі шварцшильдівської маси; за означенням [15]

$$B^{(i)}_{(k)} = -\frac{1}{2} R^{(i)(4)}_{(m)(n)} \varepsilon^{(m)(n)}_{(k)} \tag{8}$$

(тут круглі дужки позначають локальні тетрадні компоненти відповідних величин; $\varepsilon^{(m)(n)}_{(k)}$ є символом Леві–Чівіти). Використовуємо стандартні шварцшильдівські координати $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$, у яких ненульові компоненти метричного тензора $g_{\mu\nu}$ є такими:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta, \quad g_{44} = 1 - \frac{2M}{r}, \end{aligned} \tag{9}$$

де M – маса шварцшильдівського джерела гравітаційного поля. Розглядаємо випадок, коли частинка рухається в площині $\theta = \pi/2$ і її спін (як і перша просторова локальна вісь (1)) ортогональний до цієї площини. Другу просторову вісь (2) зручно орієнтувати вздовж напрямку руху частинки. Тоді маємо

$$B^{(1)}_{(2)} = B^{(2)}_{(1)} = \frac{3M}{r^3}\frac{u_\| u_\perp}{\sqrt{\gamma^2-1}}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \qquad (10)$$

$$B^{(1)}_{(3)} = B^{(3)}_{(1)} = \frac{3M}{r^3}\frac{u_\perp^2\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \qquad (11)$$

де γ є релятивістським фактором Лоренца рухомої частинки за оцінкою спостерігача, який перебуває у стані спокою відносно джерела гравітаційного поля. Величина γ визначається виразом

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad (12)$$

де v^2 є квадратом 3-швидкості частинки відносно вказаного спостерігача. У випадку діагональної метрики згідно із загальним виразом для компонент 3-вектора швидкості v^i маємо

$$v^i = \frac{dx^i}{\sqrt{g_{44}}dt}. \qquad (13)$$

Тоді для v^2 записуємо

$$v^2 = v_i v^i = \gamma_{ik}v^i v^k, \qquad (14)$$

де γ_{ik} – метричний тензор 3-простору з таким співвідношенням між γ_{ik} і $g_{\mu\nu}$ для діагональної метрики: $\gamma_{ik} = -g_{ik}$. З (12)–(14) разом із $u_\mu u^\mu = 1$ випливає, що

$$\gamma = \sqrt{u_4 u^4}. \qquad (15)$$

Порівняємо величини з (10) і (11) за малої і великої швидкості. Для малої швидкості з $u_\| = \delta_1$, $u_\perp = \delta_2$, $|\delta_1| \ll 1$, $|\delta_2| \ll 1$ і $\gamma^2 - 1 = \Delta^2 \ll 1$, де

$$\Delta^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\delta_1^2 + \delta_2^2, \qquad (16)$$

із (10) і (11) випливає, що

$$B^{(1)}_{(2)} = B^{(2)}_{(1)} \approx \frac{3M}{r^3}\frac{\delta_1\delta_2}{\Delta}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \qquad (17)$$

$$B^{(1)}_{(3)} = B^{(3)}_{(1)} \approx \frac{3M}{r^3}\frac{\delta_2^2}{\Delta}. \qquad (18)$$

Тобто, за малої швидкості спільний член $3M/r^3$ у виразах для гравітомагнітних компонент (17), (18) домножується на відповідні малі множники:

$$\left|\frac{\delta_1\delta_2}{\Delta}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\delta_2^2}{\Delta}\right| \ll 1.$$

В області великих швидкостей, коли $\gamma^2 \gg 1$ і як $u_\|^2$ так і $u_\perp^2$ є величинами порядку γ^2, із (10), (11) випливає, що

$$B^{(1)}_{(2)} = B^{(2)}_{(1)} \sim \frac{3M}{r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\gamma, \qquad (19)$$

$$B^{(1)}_{(3)} = B^{(3)}_{(1)} \sim \frac{3M}{r^3}\gamma^2. \qquad (20)$$

Якщо ж лише $u_\perp^2 \gg 1$, а $u_\|^2 \ll u_\perp^2$, величини з (19) є пропорційними до $u_\|$, а величини з (20) пропорційні до γ^2. У випадку, коли $u_\|^2 \gg 1$ і $u_\perp^2 \ll u_\|^2$, величини з (19) і (20) пропорційні відповідно до $u_\perp$ and $u_\perp^2$.

Тепер ми враховуємо, що згідно з (7), (8) саме гравітомагнітні компоненти (8) визначають величини компонент прискорення $a_{(i)}$ із (7) згідно з виразом

$$a_{(i)} = -\frac{S_{(1)}}{m}B^{(1)}_{(i)}. \qquad (21)$$

Тоді для абсолютної величини прискорення

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2 + a_{(3)}^2}$$

внаслідок (19)–(21) маємо

$$|\mathbf{a}| = \frac{3M}{r^2}\frac{|S_0|}{mr}|u_\perp|\sqrt{1+u_\perp^2}, \qquad (22)$$

і вектор **a** орієнтований вздовж радіального напрямку. Згідно з (22) $|\mathbf{a}|$ не залежить від радіальної компоненти швидкості частинки і суттєво залежить від її тангенціальної компоненти.

У випадку дуже швидких рухів із $u_\perp^2 \gg 1$ згідно з (22) маємо

$$|\mathbf{a}| = \frac{3M}{r^2}\varepsilon\gamma^2, \qquad (23)$$

де γ – фактор Лоренца, обчислений за тангенціальною швидкістю $u_\perp$, а ε визначено в (7). (Зазначимо, що у досліджуваному тут частковому випадку руху частинки у шварцшильдівському полі справджується співвідношення $|S_{(1)}| = |S_0|$).

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 11

Отже, згідно з (23) абсолютна величина прискорення частинки стає значно більшою за дуже великої швидкості спінової частинки, ніж за малої швидкості. Це означає, що малість величини ε з (5) не завжди приводить до висновку щодо малості впливу спіну частинки на її прискорення за оцінкою супутнього спостерігача.

З (23) випливає кількісний критерій, який вказує величину γ, за якої реакція спінової частинки на кривину простору-часу є значною. Справді, якщо γ є величиною порядку $1/\sqrt{\varepsilon}$, згідно з (23) величина $|\mathbf{a}|$ має порядок M/r^2, що дорівнює відомому значенню прискорення вільного падіння в ньютонівській теорії тяжіння.

Результати цього розділу описують спін-гравітаційну взаємодію у власній системі відліку частинки. Водночас необхідно вивчати вплив спін-гравітаційної взаємодії на траєкторії частинки, особливо коли її швидкість є дуже високою. Різні випадки суттєво негеодезичних орбіт дуже швидкої спінової частинки у полі Шварцшильда, які випливають із рівнянь МП, досліджено в [16–21]. Зокрема, показано, що внаслідок сильного впливу високорелятивістської спін-гравітаційної взаємодії у полі Шварцшильда існують колові орбіти спінової частинки, які значно відрізняються від колових орбіт безспінової частинки у цьому полі. Для реалізації таких орбіт спінова частинка мусить мати високу швидкість, що відповідає величині γ порядку $1/\sqrt{\varepsilon}$.

4. Про електромагнітне випромінювання зарядженої спінової частинки

Використаємо вираз (23) для оцінки електромагнітного випромінювання спінової частинки, що має електричний заряд q. Справді, згідно з відомим результатом класичної електродинаміки інтенсивність I електромагнітного випромінювання в системі відліку, в якій швидкість зарядженої частинки дорівнює нулеві за ненульового прискорення w визначається виразом

$$I = \frac{2q^2w^2}{3c^3}, \tag{24}$$

де c – швидкість світла. Підставляючи в (24) вираз (23) як w в системі одиниць, де $c = 1$, отримуємо

$$I = 6q^2\frac{M^2}{r^4}\varepsilon^2\gamma^4. \tag{25}$$

Співвідношення (25) показує, що завдяки множнику γ^4 величина I може бути значною для певних значень тангенціальної швидкості навіть за малих значень ε і далеко від шварцшильдівського горизонту ($r \gg 2M$).

5. Числові оцінки

Поряд із малою величиною ε з (5), зручно враховувати величину ε_0, означену як

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{|S_0|}{mM}.$$

На відміну від ε, величина ε_0 не залежить від координати r. Легко перевірити, що для електрона у гравітаційному полі чорної діри з масою у три маси Сонця ε_0 дорівнює $4 \cdot 10^{-17}$. Тоді необхідна величина фактора Лоренца γ для реалізації електроном певних високорелятивістських орбіт поблизу чорної діри має порядок 10^8. Таке значення відповідає енергії вільного руху електрона порядку 10^{14} еВ. Аналогічно для протона в полі такої чорної діри відповідне значення енергії становить 10^{18} еВ. Для масивної чорної діри ці значення є більшими: наприклад, якщо M дорівнює 10^6 сонячних мас, відповідна величина енергії для електрона дорівнює 10^{17} еВ, а для протона – 10^{21} еВ. Звичайно, далеко від чорної діри ці величини є більшими, оскільки необхідна величина γ пропорційна до $\sqrt{r}$.

Зазначимо, що для нейтрино поблизу чорної діри з масою у три маси Сонця необхідна величина γ для рухів по високорелятивістських орбітах відповідає енергії вільного руху нейтрино, що становить 10^5 еВ. Якщо ж маса чорної діри дорівнює 10^6 сонячних мас, відповідна величина становить 10^8 еВ.

6. Висновки

З рівнянь МП випливає, що внаслідок реакції спінової частинки на кривину простору-часу її рух відхиляється від руху безспінової частинки. Це відхилення є малим, коли швидкість спінової частинки відносно шварцшильдівської маси не є дужу великою і стає значно більшим за швидкості, близької до швидкості світла. Як наслідок, високорелятивістська електрично заряджена спінова частинка може генеруавати інтенсивне електромагнітне випромінювання відповідно до співвідношення (25).

Згідно з числовими оцінками, слід очікувати, що сильна реакція ультрарелятивістських електронів і протонів на кривину простору-часу може проявитися поблизу деяких чорних дір, зокрема у специфіці генерованого ними електромагнітного випромінювання.

Ця робота підтримана бюджетною програмою України "Підтримка розвитку досліджень у пріоритетних галузях" (CPCEC 6451230).

1. V. Fock, D. Ivanenko. Über eine megliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie. *Z. Phys.* **54**, 798 (1929).
2. V. Fock. Geometrisierung der Diracschen Theorie des Electrons. *Z. Phys.* **57**, 261 (1929).
3. H. Weyl. Gravitation and the electron. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **15**, 323 (1929).
4. M. Mathisson. Neue Mechanik materieller Systeme. *Acta Phys. Pol.* **6**, 218 (1937).
5. S. Wong. Heisenderg equations of motion for spin-1/2 wave equation in general relativity. *Int. J. Theor. Phys.* **5**, 221 (1972).
6. L. Kannenberg. Mean motion of Dirac electrons in a gravitational field. *Ann. Phys. (N.Y.)* **103**, 64 (1977).
7. A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. *Proc. R. Soc. A* **209**, 248 (1951).
8. E. Corinaldesi, A. Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. II. *Proc. R. Soc. A* **209**, 259 (1951).
9. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* (Freeman, 1973).
10. S. Rasband. Black holes and spinning particles in general relativity. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 111 (1973).
11. R. Wald. Gravitational spin interaction. *Phys. Rev. D* **6**, 406 (1972).
12. R.M. Plyatsko, A.L. Vynar. Essentially nongeodesic motions of a rotating test body in the general theory of relativity. *Sov. Phys. Dokl.* **27**, 328 (1982).
13. R.M. Plyatsko. *Manifestations of Gravitational Ultrarelativistic Spin-Orbit Interaction* (Naukova Dumka, 1988) (in Ukrainian).
14. R. Plyatsko. Gravitational ultrarelativistic spin-orbit interaction and the weak equatorial principle. *Phys. Rev. D* **58**, 084031 (1998).
15. K. Thorne, J. Hartle. Laws of motion and precession for black holes and other bodies. *Phys. Rev. D* **31**, 1815 (1985).
16. R. Plyatsko, M. Fenyk, O. Stefanyshyn. Solutions of mathisson-papapetrou equations for highly relativistic spinning particles. In: *Equations of Motion in Relativistic Gravity* (Springer, 2015), p. 165.
17. R. Plyatsko, M. Fenyk. Highly relativistic spin-gravity coupling for fermions. *Phys. Rev. D* **91**, 064033 (2015).
18. R. Plyatsko, M. Fenyk. Reply to "Comment on 'Highly relativistic spin-gravity coupling for fermions' ". *Phys. Rev. D* **93**, 028502 (2016).
19. R. Plyatsko, M. Fenyk. Antigravity: Spin-gravity coupling in action. *Phys. Rev. D* **94**, 044047 (2016).
20. R. Plyatsko, M. Fenyk, V. Panat. Highly relativistic spin-gravity coupling. *Phys. Rev. D* **96**, 064038 (2017).
21. R. Plyatsko, V. Panat, M. Fenyk. Nonequatorial circular orbits of spinning particles in the Schwarzschild-de Sitter background. *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 150 (2018).

Одержано 29.08.19

R.M. Plyatsko, M.T. Fenyk

ON REACTION OF A SPINNING
PARTICLE ON THE SPACETIME CURVATURE

S u m m a r y

The reaction of a classical (nonquantum) spinning particle on the spacetime curvature according to the Mathisson–Papapetrou equations is analyzed. From the point of view of the observer comoving with the particle in Schwarzschild's field it is the reaction on the gravitomagnetic components of the gravitational field. The values of these components significantly depend on the relativistic Lorentz factor calculated by the particle velocity relative to the Schwarzschild mass. As a result, the value of the spinning particle acceleration relative to the geodesic motion is proportional to the second power of the Lorentz factor. At the same time, the intensity of the electromagnetic radiation of a charged spinning particle is proportional to the fourth power of this factor. Some numerical estimates are presented.