В.Є. КУЗЬМИЧОВ, В.В. КУЗЬМИЧОВ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: vkuzmichev@bitp.kiev.ua)

УДК 531.51, 530.145

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПРИНЦИП НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У КВАНТОВІЙ КОСМОЛОГІЇ [1]

Вивчаються ефекти гравітації, що проявляються при одночасному вимірюванні двох некомутуючих спостережуваних у квантовій теорії. Матерія та гравітація розглядаються як квантові поля. Часове рівняння типу Шредінгера наведено для випадку скінченної кількості ступенів вільності: одного для матеріального поля та одного для геометрії. Для просторово замкненої системи, заповненої пилом і випромінюванням, що знаходяться у визначених квантових станах, знайдено розв'язки квантових рівнянь та показано існування мінімальної вимірюваної довжини та мінімального імпульсу. Виявляється, що одночасне вимірювання флуктуацій внутрішньої та зовнішньої кривини просторово-подібної гіперповерхні у просторі-часі не може бути виконане з точністю, що перевищує сталу Планка. Обговорюються співвідношення невизначеності Анру та Бронштейна.

Ключові слова: квантова гравітація, квантова геометродинаміка, космологія, принцип невизначеності.

1. Вступ

Згідно з принципом невизначеності Гайзенберга не можна виміряти одночасно з довільною точністю дві спостережувані, які не комутують між собою. Цей принцип у своїй стандартній квантовомеханічній формі не бере до уваги ефекти гравітації. У той же самий час при вивченні властивостей квантових систем на малих масштабах необхідно мати справу з високими енергіями. Очікується, що на масштабах, менших за планківський, класичні уявлення про простір і час втрачають свій зміст та потрібен фундаментальний перегляд цих понять. З середини 1930-х років точаться дебати про те, яким чином залучення гравітації має змінити принцип невизначеності [1, 2]. Інтерес до проблеми відродився у середині 1980-х років після того, як у теорії струн було доведено існування мінімальної спостережуваної довжини. Вплив кривизни простору-часу на статистичні флуктуації двох спостережуваних, що відповідають двом канонічно спряженим змінним, може бути з'ясований у квантовій теорії, яка розглядає гравітацію на тих же підставах, що і квантовані матеріальні поля.

У цій статті ми представляємо результати наших досліджень флуктуацій спостережуваних, що характеризують саму квантову гравітаційну систему, таких як внутрішня і зовнішня кривизни просторово-подібних гіперповерхонь у просторі-часі, а також даємо вирішення проблеми мінімальної довжини у рамках космологічної моделі, що має точний розв'язок.

Модель зі скінченною кількістю ступенів вільності може бути прийнятною основою для вивчення проблем квантової гравітації. Однорідні моделі мінісуперпростору довели свою придатність у класичній космології. Вони мають прогностичну силу та узгоджуються зі спостереженнями. Це дає надію на те, що однорідні моделі можуть бути корисними також і у квантовій космології. Квантова теорія гравітації з добре визначеною часовою змінною для таких моделей була запропонована та вивчена в роботах [3–7].

2. Часове рівняння та його тлумачення

Розглянемо однорідну ізотропну квантову гравітаційну систему. Вона описується часовим рівнянням типу Шредінгера (у планківських одиницях)

$$-i\partial_T|\Psi(T)\rangle = \mathrm{H}|\Psi(T)\rangle, \tag{1}$$

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

де оператор

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aH_\phi - a^4\frac{\Lambda}{3}\right) \quad (2)$$

може розглядатися як ефективний гамільтоніан, що явно не залежить від конформного часу T; a є космічним масштабним фактором, який визначає геометричні властивості системи у випадку максимально симетричної геометрії з метрикою Робертсона-Вокера, $H_\phi = H_\phi(a)$ є самоспряженим гамільтоніаном матеріального сектора системи, що представлений у формі однорідного скалярного поля ϕ, Λ – космологічна стала, а $\kappa = +1, 0, -1$ є константою кривизни для просторово замкненої, пласкої та відкритої геометрій.

Комутаційне співвідношення між a та спряженим до нього імпульсом $\pi = -i\hbar\,\partial_a$ має вигляд

$$[a, -i\partial_a] = i. \quad (3)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) може бути записаний як

$$|\Psi(T)\rangle = \sum_{n,k} e^{\frac{i}{2}E_{n(k)}(T-T_0)} C_{nk}(T_0)|u_k\rangle|f_{n(k)}\rangle, \quad (4)$$

де T_0 – довільна стала, що задає точку відліку часу. Вектори стану $|u_k\rangle$ та $|f_{n(k)}\rangle$ задовольняють рівнянням

$$\langle u_k|H_\phi|u_{k'}\rangle = M_k(a)\,\delta_{kk'}, \quad (5)$$

$$\left(-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aM_k(a) - a^4\frac{\Lambda}{3}\right)|f_{n(k)}\rangle = E_{n(k)}|f_{n(k)}\rangle, \quad (6)$$

$M_k(a)$ – власна маса-енергія нової ефективної матерії у дискретному та/або неперервному k-му стані. Вважається, що вектори $|u_k\rangle$ і $|f_{n(k)}\rangle$ утворюють повні набори ортонормованих функцій. Власне значення $E_{n(k)}$ визначає густину енергії релятивістської матерії, $\rho_\gamma = a^{-4}E_{n(k)}$, а n нумерує дискретні та/або неперервні стани системи з матерією у фіксованому k-му стані. Коефіцієнт C_{nk} задає імовірність $|C_{nk}(T_0)|^2$ знайти систему в n-му стані релятивістської матерії та k-му стані ефективної матерії в момент часу T_0.

3. Співвідношення невизначеності

Співвідношення невизначеності між масштабним фактором та спряженим до нього імпульсом, яке узгоджується з комутаційним співвідношенням (3), має вигляд

$$\Delta a \Delta\pi \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (7)$$

де $\Delta a = \sqrt{\langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2}$ – середньоквадратичне відхилення a, подібний вираз є також для $\Delta\pi$, дужками позначено середні значення.

Для космологічної системи з нульовою космологічною сталою, яка заповнена пилом та релятивістською матерією, маємо власне значення $E_{n(k)} = 2n + 1 - M_k^2$ та вектор стану

$$|f_{n(k)}\rangle \equiv f_n(\xi_k) = N_{nk}\, e^{-\frac{1}{2}\xi_k^2} H_n(\xi_k), \quad (8)$$

де $\xi_k = a - M_k$, H_n – поліном Ермітта, N_{nk} – константа нормування, а хвильова функція нормована на інтервалі $[-M_k, \infty)$.

З точністю порядка $e^{-M_k^2}$ [3], знайдемо

$$\langle a^2\rangle = n + \frac{1}{2} + M_k^2, \quad \langle a\rangle = M_k, \quad (9)$$

де усереднення виконано по станах (8). Тоді у звичайних фізичних одиницях,

$$\Delta a = l_{\mathrm{P}}\sqrt{n + \frac{1}{2}}, \quad (10)$$

де $l_{\mathrm{P}} = \sqrt{G\hbar/(c^3)}$ є планківською довжиною. Для імпульсу отримаємо

$$\langle \pi^2\rangle = n + \frac{1}{2}, \quad \langle\pi\rangle = 0 \quad (11)$$

та

$$\Delta\pi = m_{\mathrm{P}}\, c\sqrt{n + \frac{1}{2}}, \quad (12)$$

де $m_{\mathrm{P}}c = \hbar/l_{\mathrm{P}}$ є планківським імпульсом. Як наслідок, знаходимо добуток невизначеностей у тому ж самому вигляді як для гармонічного осцилятора,

$$\Delta a\,\Delta\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (13)$$

З рівнянь (10) та (12) випливає, що флуктуації Δa та $\Delta\pi$ приймають мінімальні значення в основному (вакуумному) стані з $n = 0$,

$$\Delta a_{\min} = \frac{l_{\mathrm{P}}}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\pi_{\min} = \frac{m_{\mathrm{P}}\, c}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

 ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 11

Розмір флуктуацій зростає як квадратний корінь $\sqrt{n}$. Цікаво буде оцінити розмір флуктуацій у підсистемі, що має масу-енергію спостережуваної частини нашого всесвіту $l \sim 10^{28}$ см. Космологічні параметри $E_{n(k)} \sim 10^{118} \ll M_k^2 \sim 10^{122}$ (тобто $\rho_\gamma \sim 10^{-10}$ ГеВ см$^{-3}$ та $\rho_m \sim 10^{-5}$ ГеВ см$^{-3}$) відповідають квантовому числу $n \sim 10^{122}$ та флуктуаціям $\Delta a \sim l \sim 10^{28}$ см. При такому описі спостережувана частина всесвіту виглядає як гігантська флуктуація [7], що відсилає нас до розмірковувань Больцмана про витоки спостережуваного всесвіту (див. [8]).

Вирази (14) вирішують проблему існування мінімальної спостережуваної довжини та мінімального імпульсу у контексті космологічної моделі, що має точний розв'язок.

В дійсності співвідношення невизначеності (7) встановлює зв'язок між флуктуаціями величин, які визначають внутрішню та зовнішню кривизни просторово-подібної гіперповерхні у просторі-часі. Співставивши квантові оператори скалярній кривизні ${}^{(3)}R$ та тензору зовнішньої кривизни $K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial^{(3)}g_{ij}/\partial\tau$, де ${}^{(3)}g_{ij}$ є 3-метрикою, а τ – власний час, можна явно переписати рівняння (7) через флуктуації кривини

$$\frac{\Delta^{(3)}R}{|^{(3)}R|}\ \ \Delta K\ {}^{(3)}V \gtrsim 4\pi\hbar, \tag{15}$$

де $K = K_i^i$ та ${}^{(3)}V \sim \frac{4}{3}\pi a^3$ є вимірюваним 3-об'ємом (спостережуваною частиною системи). Співвідношення невизначеності (15) демонструє, що добуток відносної флуктуації скалярної кривизни та флуктуації зовнішньої кривини у спостережуваному об'ємі має бути більшим за планківську сталу.

Співвідношення невизначеності (7) може бути зведене до співвідношення невизначеності Анру для флуктуацій метрики та тензора Ейнштейна. У противагу до формального припущення, що рівняння Ейнштейна є чинними також у квантовому режимі [9], у роботі [5] було показано, що рівняння квантової космології можуть бути записані у формі рівнянь Ейнштейна–Фрідмана з квантовими поправочними членами до повної густини енергії та тиску. Тоді швидкість зміни імпульсу у часі описується рівнянням $\dot{\pi} = -\frac{1}{2}a^2 T_\alpha^\alpha + \kappa$, де T_α^α – слід тензора енергії-імпульсу. Розглядаючи флуктуації величин у просторових напрямках у супутній системі відліку, можна записати T_x^x-компоненту тензора енергії-імпульсу як $T_x^x = -\mathrm{p}$, де p є тиском, який визначається як сила, що діє на елемент поверхні з площею $\sim a^2$ у напрямку осі x. У такому випадку флуктуацію імпульсу можна оцінити як $\Delta\pi \sim \Delta T_x^x a^2 \delta\tau$, де $\delta\tau$ – часовий інтервал, а $\Delta T_x^x \sim T_x^x$. Компоненту метрики g_{xx} можна записати у вигляді $g_{xx} = a^2\gamma_{xx}$, де γ_{xx} є компонентою супутньої просторової метрики, флуктуаціями якої можна знехтувати, $\Delta\gamma_{xx} = 0$. Тоді флуктуації Δg_{xx} та Δa будуть пов'язані між собою: $\Delta g_{xx}/g_{xx} = 2\Delta a/a$. Як наслідок, у системі спокою співвідношення (7) набуває вигляду

$$\Delta g_{xx}\Delta T_x^x \gtrsim \hbar\frac{g_{xx}}{\delta\tau^{(3)}V}, \tag{16}$$

де ${}^{(3)}V \sim a^3$ є 3-об'ємом. Введемо тензор Ейнштейна, $G_x^x = 8\pi T_x^x$ (в одиницях $G = c = 1$), визначимо 4-об'єм ${}^{(4)}V \sim \delta\tau^{(3)}V$ та перепишемо попереднє співвідношення у формі Анру

$$\Delta g_{xx}\Delta G^{xx} \gtrsim \hbar\frac{8\pi}{{}^{(4)}V}. \tag{17}$$

Встановлений зв'язок між рівняннями (7) та (17) можна тлумачити як такий, що з'ясовує фізичний зміст рівняння (17).

4. Прикінцеві зауваження

Проаналізуємо стисло співвідношення невизначеності, яке отримав Бронштейн у своїх новаторських роботах [1,2]. Розглянемо рух тестового тіла з масою $m = \rho V$, де ρ є його густиною, а V – об'єм. Невизначеність імпульсу тестового тіла Δp_x складається з двох доданків, а саме звичайного квантовомеханічного доданка, який обернено пропорційний до невизначеності координати, $\hbar/\Delta x$, та другого доданка, що пов'язаний з гравітаційним полем, яке створюється самим вимірювальним приладом внаслідок віддачі підчас процедури вимірювання. Другий доданок може бути приведений до вигляду

$$\frac{\Delta p_x}{\hbar} > \left(\frac{G}{\hbar c}m^2\right)^{1/3}\frac{1}{L}, \tag{18}$$

де $L \sim V^{1/3}$. Використовуючи співвідношення між невизначеністю символа Кристофеля Γ_{00}^1 та невизначеністю імпульсу Δp_x, $\Delta\Gamma_{00}^1 \approx \Delta p_x/mT$, де T –

часовий проміжок, за який відбувається вимірювання імпульсу, можна отримати нерівність Бронштейна

$$\Delta\Gamma^1_{00} > \left(\frac{\hbar}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{G}{c\rho}\right)^{1/3}\frac{1}{T}. \tag{19}$$

Таке грубе припущення дозволяє оцінити границі придатності загальної теорії відносності [10]. Огляд сучасного стану проблеми можна знайти, наприклад, у роботі [11] (та у посиланнях до неї).

Ця робота була частково підтримана Національною академією наук України (проекти Nos. 0117U00237 та 0116U003191).

1. M. Bronstein. Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder. *Phys. Z. Sowjetunion* **9**, 140 (1936).
2. M. Bronstein. Kvantovanie gravitatsionnykh voln. *ZhETF* **6**, 195 (1936).
3. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The Big Bang quantum cosmology: The matter-energy production epoch. *Acta Phys. Pol. B* **39**, 979 (2008).
4. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Quantum evolution of the very early universe. *Ukr. J. Phys.* **53**, 837 (2008).
5. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Quantum corrections to the dynamics of the expanding universe. *Acta Phys. Pol. B* **44**, 2051 (2013).
6. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Can quantum geometrodynamics complement general relativity? *Ukr. J. Phys.* **61**, 449 (2016).
7. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The matter-energy intensity distribution in a quantum gravitational system. *Quantum Stud.: Math. Found.* **5** (2), 245 (2018).
8. C. Kiefer. Can the Arrow of Time Be Understood from Quantum Cosmology? In *The Arrows of Time. Fundamental Theories of Physics, Vol. 172.* Edited by L. Mersini-Houghton, R. Vaas (Springer, 2012).
9. W.G. Unruh. Why study quantum theory? *Can. J. Phys.* **64**, 128 (1986).
10. G. Gorelik, V.Ya. Frenkel. *Matvei Petrovich Bronstein and Soviet Theoretical Physics in the Thirties* (Birkhäuser, 1994) [ISBN: 978-3-7643-2752-1].
11. L. Perivolaropoulos. Cosmological horizons, uncertainty principle, and maximum length quantum mechanics. *Phys. Rev. D* **95**, 103523 (2017).

Одержано 20.08.19

V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev

GENERALIZED UNCERTAINTY
PRINCIPLE IN QUANTUM COSMOLOGY

S u m m a r y

The effects of gravity which manifest themselves when performing the simultaneous measurement of two non-commuting observables in the quantum theory are discussed. Matter and gravity are considered as quantum fields. The Schrödinger-type time equation is given for the case of a finite number of degrees of freedom: one for the matter field and one for geometry. For a spatially closed system filled with dust and radiation being in definite quantum states, the solutions to the quantum equations are found, and the existence of the minimum measurable length and the minimum momentum is shown. It appears that the simultaneous measurement of fluctuations of the intrinsic and extrinsic curvatures of the spacelike hypersurface in spacetime cannot be performed with an accuracy exceeding the Planck constant. Unruh's and Bronstein's uncertainty relations are discussed.