

Л. ЧІЛЛОГ,<sup>1</sup> Т. ХАРКО<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Кафедра фізики Університету Бабеш-Бойяї

(Вул. Когелнічану, Клуж-Напока 400084, Румунія; e-mail: lehel@csillag.ro)

<sup>2</sup> Астрономічна обсерваторія

(Вул. Ціресілор 19, Клуж-Напока 400084, Румунія; e-mail: tiberiu.harko@aira.astro.ro)

УДК 539

НАПІВСИМЕТРИЧНА МЕТРИЧНА ГРАВІТАЦІЯ<sup>1</sup>

У цій роботі ми вивчаємо геометричне розширення загальної теорії відносності, яке базується на зв'язку з особливим типом кручення. Цей зв'язок полягає у тому, що його тензор кручення повністю визначається векторним ступенем вільності, і він був вперше введений Фрідманом і Схоутеном. Ми досліджуємо його фізичні наслідки, представляючи три космологічні моделі в рамках розглянутого геометричного розширення загальної теорії відносності, і порівнюємо прогнози моделей з передбаченнями  $\Lambda$ CDM-моделі (з холодною темною матерією і темною енергією), а також даними спостережень для функції Хаббла. Наші результати показують, що геометрія, передбачена Фрідманом, може пояснити дані спостережень для функції Хаббла без потреби в темній енергії.

**Ключові слова:** космологічні моделі, напівсиметрична метрична гравітація, загальна теорія відносності, тензор кручення, функція Хаббла.

## 1. Вступ

Загальна теорія відносності (ЗТВ) [1] була дуже успішною в поясненні багатьох спостережуваних явищ, таких як зміщення перигелію Меркурія, відхилення світла, гравітаційна затримка сигналу (ефект Шапіро), ефект Нордтведта, гравітаційні хвилі [2, 3]. Однак загальновідомо, що теорія стикається як зі спостережуваними, так і з теоретичними проблемами, у тому числі такими питаннями, як темна матерія, темна енергія, проблема природності і напруженість Хаббла. Тому протягом останніх кількох десятиліть для розв'язання цих проблем були розроблені різноманітні розширення ЗТВ, відомі як модифіковані теорії гравітації. Ці розширення можна розподілити на три групи:

1. Модифікації, де змінено дію  $f(R) = R$ .
2. Модифікації зі зміненою геометрією.
3. Модифікації, де змінено як геометрію, так і дію.

У цій статті ми вивчаємо розширення загальної теорії відносності, у якому ми змінюємо основний зв'язок, отже, переходимо до неріманової геометрії. У цьому піході афінний зв'язок характеризує-

ться трьома величинами: тензором Рімана, тензором неметричності і тензором кручення. Існує вісім можливостей, як показано на рис. 1.

Запропоноване нами розширення базується на особливому типі геометрії Рімана–Картана, яку ми називаємо *напівсиметричною метричною геометрією*, де неметричність дорівнює нулю, але кручення ненульове і приймає спеціальну форму. Цю геометрію вперше представили Дж. Схоутен і Олександр Фрідман [4], засновник сучасної космології, в 1924 році незадовго до його смерті. У фізичній літературі цей зв'язок повсюдно ігнорується, незважаючи на його фізичну актуальність: Схоутен зазначив у своїй книзі, що якщо людина рухається по поверхні Землі і завжди звернена обличчям до певної точки, її зміщення є напівсиметричним і метричним [5]. З іншого боку, математичні властивості напівсиметричних метричних зв'язків досконально вивчені [6, 7]. Тому метою цієї статті є дослідження фізичних і космологічних наслідків геометрії, передбаченої Фрідманом.

## 2. Попередні геометричні позначення

У цьому розділі ми надаємо попередні геометричні співвідношення, необхідні для формулювання

Цитування: Чіллог Л., Харко Т. Напівсиметрична метрична гравітація. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 7, 485 (2024).  
Citation: Csillag L., Harko T. Semi-symmetric metric gravity. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 484 (2024). <https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.484>.

<sup>1</sup> Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції “XII Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics”.

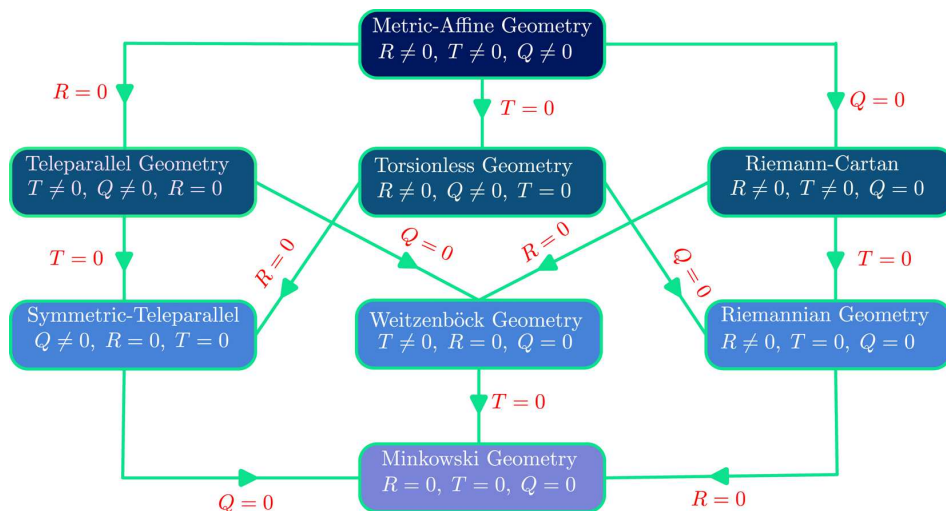


Рис. 1. Вісім можливих класів геометрій, які описуються тензором кручення, тензором неметричності і тензором Рімана

напівсиметричної метричної гравітації. Для початку ми встановимо наші умовні позначення і визначимо кручення як

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = 2\Gamma^{\mu}_{[\rho\nu]}. \quad (1)$$

Для напівсиметричного метричного зв'язку, введеного Фрідманом і Схоутеном, тензор кручення можна виразити як [4]

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = \pi_{\rho}\delta_{\nu}^{\mu} - \pi_{\nu}\delta_{\rho}^{\mu} \text{ для деякої форми } \pi_{\rho}. \quad (2)$$

Підставляючи цю форму кручення в загальний розклад

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(-Q_{\lambda\nu\rho} + Q_{\rho\lambda\nu} + Q_{\nu\rho\lambda}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(T_{\rho\nu\lambda} + T_{\nu\rho\lambda} - T_{\lambda\rho\nu}), \quad (3)$$

отримуємо символи Кристофеля

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \pi^{\mu}g_{\rho\nu} + \pi_{\nu}\delta_{\rho}^{\mu}. \quad (4)$$

Тензор Рімана напівсиметричної метричної зв'язності

$$Riem^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} + \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \quad (5)$$

можна розкласти за допомогою тензора Рімана  $\overset{\circ}{R}iem^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$  зв'язку Леві-Чівіта у вигляді [6]

$$Riem^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \overset{\circ}{R}iem^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - S_{\sigma\nu}\delta_{\rho}^{\mu} + S_{\rho\nu}\delta_{\sigma}^{\mu} - g_{\sigma\nu}S_{\rho\lambda}g^{\lambda\mu} + g_{\rho\nu}S_{\sigma\lambda}g^{\lambda\mu}, \quad (6)$$

де тензор  $S_{\nu\sigma}$  визначається як

$$S_{\nu\sigma} = \overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\pi_{\sigma} - \pi_{\nu}\pi_{\sigma} + \frac{1}{2}g_{\nu\sigma}\pi_{\lambda}\pi^{\lambda}. \quad (7)$$

Тензор і скаляр Річчі можна отримати безпосередньо, і вони мають вигляд

$$R_{\nu\sigma} = \overset{\circ}{R}_{\nu\sigma} - 2S_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma}S_{\lambda\beta}g^{\lambda\beta}, \quad (8)$$

$$R = \overset{\circ}{R} - 6S_{\beta\lambda}g^{\beta\lambda}.$$

### 3. Напівсиметрична метрична гравітація

У цьому розділі ми викладемо теорію гравітації, побудовану на раніше введеному напівсиметричному метричному зв'язку. Перш за все, ми постулюємо, що рівняння гравітаційного поля мають вигляд

$$R_{(\nu\sigma)} - \frac{1}{2}Rg_{\nu\sigma} = 8\pi T_{\nu\sigma}, \quad (9)$$

де  $R_{\nu\sigma}$  і  $R$  позначають кривизну Річчі і скаляр напівсиметричної метричної зв'язності, відповідно, а  $T_{\nu\sigma}$  позначає тензор енергії-імпульсу матерії. Підставляючи формули (8) у (9), отримуємо

$$\overset{\circ}{R}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\nu\sigma}\overset{\circ}{R} - S_{\sigma\nu} - S_{\nu\sigma} + 2g_{\sigma\nu}S_{\lambda\beta}g^{\lambda\beta} = 8\pi T_{\nu\sigma}. \quad (10)$$

Щоб отримати повне пост-ріманове розширення рівняння Ейнштейна, ми також виражаємо  $S$  через  $\pi$  за допомогою (7). Після деяких алгебраїчних перетворень ми легко знаходимо:

$$\overset{\circ}{R}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\nu\sigma}\overset{\circ}{R} - \overset{\circ}{\nabla}_{\sigma}\pi_{\nu} - \overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\pi_{\sigma} + 2\pi_{\sigma}\pi_{\nu} +$$

$$+ 2g_{\sigma\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\lambda \pi^\lambda + g_{\nu\sigma} \pi^\rho \pi_\rho = 8\pi T_{\nu\sigma}. \quad (11)$$

Як згадувалося у вступі до цієї статті, наша мета – дослідити космологічні наслідки напівсиметричного метричного зв'язку. З цією метою ми оцінюємо рівняння поля (11) для ізотропної, однорідної і просторово плоскої метрики Фрідмана–Леметра–Робертсона–Волкера (FLRW).

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (12)$$

У ролі матерії ми розглядаємо ідеальну рідину, яка описується тензором енергії-імпульсу:

$$T_{\nu\sigma} = \rho u_\nu u_\sigma + p(u_\nu u_\sigma + g_{\nu\sigma}). \quad (13)$$

Ця задача розглядається в супутній системі, в якій чотири-швидкість задається як

$$u_\nu = (-1, 0, 0, 0) \iff u^\nu = (1, 0, 0, 0). \quad (14)$$

Нарешті, оскільки це дуже симетричний випадок, ми вибираємо

$$\pi_\nu = (-\omega(t), 0, 0, 0) \iff \pi^\nu = (\omega(t), 0, 0, 0). \quad (15)$$

Із врахуванням цих припущень, рівняння Фрідмана набувають вигляду

$$3H^2 = 8\pi\rho - 3\omega^2 + 6H\omega, \quad (16)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi p + 4H\omega - \omega^2 + 2\dot{\omega}, \quad (17)$$

де ми позначили  $H = \dot{a}/a$ .

Легко бачити, що рівняння Фрідмана ЗТВ відновлюються в границі  $\omega \rightarrow 0$ . Отже, ми тлумачимо додаткові члени як ефективну темну енергію геометричного типу

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi} (6H\omega - 3\omega^2), \quad (18)$$

$$p_{\text{eff}} = -\frac{1}{8\pi} (4H\omega - \omega^2 + 2\dot{\omega}).$$

Тому ми можемо переписати рівняння Фрідмана у вигляді

$$3H^2 = 8\pi(\rho + \rho_{\text{eff}}), \quad (19)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi(p + p_{\text{eff}}). \quad (20)$$

Отже, рівняння неперервності набуває вигляду

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) + \dot{\rho}_{\text{eff}} + 3H(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}}) = 0. \quad (21)$$

Також можна записати в еквівалентній формі

$$3H(\rho + p) + \frac{3}{8\pi} \left[ \frac{d}{dt} (2H\omega - \omega^2) + H(2H\omega - 2\omega^2 - 2\dot{\omega}) \right] = 0. \quad (22)$$

Для спрощення формалізму, введемо набір безрозмірних змінних, а саме

$$H = H_0 h, \quad \tau = H_0 t, \quad \omega = H_0 \Omega, \quad (23)$$

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi} r, \quad p = \frac{3H_0^2}{8\pi} P.$$

У цих позначеннях рівняння Фрідмана можна переписати як

$$h^2 = r + r_{\text{eff}}, \quad (24)$$

$$2\frac{dh}{d\tau} + 3h^2 = -3(P + P_{\text{eff}}), \quad (25)$$

де

$$r_{\text{eff}} = 2h\Omega - \Omega^2, \quad P_{\text{eff}} = -\frac{1}{3} \left( 4h\Omega - \Omega^2 + 2\frac{d\Omega}{d\tau} \right), \quad (26)$$

$$\rho_{\text{eff}} = (3H_0^2/8\pi)r_{\text{eff}} \text{ та } p_{\text{eff}} = (3H_0^2/8\pi)P_{\text{eff}}.$$

Для прямого порівняння зі спостереженнями, ми також вводимо змінну червоного зсуву

$$1+z = 1/a, \quad \text{що означає } \frac{d}{d\tau} = -(1+z)h(z) \frac{d}{dz}. \quad (27)$$

Рівняння еволюції в представленні червоного зсуву мають вигляд:

$$h^2(z) = r(z) + 2h(z)\Omega(z) - \Omega^2(z),$$

$$2(1+z)h(z) \frac{dh(z)}{dz} + 3h^2(z) = -3P(z) + 4h(z)\Omega(z) - \Omega^2(z) - 2(1+z)h(z) \frac{d\Omega}{dz}. \quad (28)$$

#### 4. Космологічні моделі

У цьому розділі ми будуємо три космологічні моделі, формулюючи рівняння стану для тиску матерії і густини енергії речовини, а також для ефективного тиску і ефективної густини речовини, відповідно. Потім ми порівнюємо наші результати зі стандартною моделлю з холодною темною матерією і  $\Lambda$ -членом ( $\Lambda$ CDM). Далі будемо вважати речовиною пил без тиску, тобто покладемо  $P = 0$ .

#### 4.1. Аналітична космологічна модель

Враховуючи припущення  $P = 0$ , ми маємо розглянути лише рівняння стану, які пов'язують ефективні компоненти. В рамках першої моделі ми припускаємо, що і ефективний тиск, і ефективна густина є постійними, але вони відрізняються. Математично це можна сформулювати так:

$$3\omega(2H - \omega) = \Lambda, \quad 4H\omega - \omega^2 + 2\dot{\omega} = \frac{2}{3}k\Lambda, \quad (29)$$

де  $k$  і  $\Lambda$  є ненульовими константами, і  $k$  вважається додатним. Виключаючи  $H$  з рівнянь стану, ми отримаємо для  $\omega$  диференціальне рівняння

$$2\dot{\omega} + \omega^2 + 2(1 - k)\frac{\Lambda}{3} = 0, \quad (30)$$

яка допускає аналітичний розв'язок

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{2(k-1)\Lambda}{3}} \tanh \left[ \frac{\sqrt{(k-1)\Lambda}}{\sqrt{6}} (t - t_0) \right], \quad (31)$$

де  $t_0$  – довільна стала інтегрування. Тоді, використовуючи цей вираз, для функції Хаббла отримаємо

$$H(t) = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2\sqrt{6(k-1)}} \tanh \left[ \frac{\sqrt{(k-1)\Lambda}}{\sqrt{6}} (t - t_0) \right] \times \\ \times \left\{ \coth^2 \left[ \frac{\sqrt{(k-1)\Lambda}}{\sqrt{6}} (t - t_0) \right] + 2(k-1) \right\}. \quad (32)$$

Густина речовини, отримана з першого рівняння Фрідмана  $\rho = 3H^2 - \Lambda$ , має вигляд

$$8\pi\rho(t) = \frac{\Lambda}{8(k-1)} \left\{ \coth \left[ \frac{\sqrt{(k-1)\Lambda}}{6} (t - t_0) \right] - \right. \\ \left. - 2(k-1) \tanh \left[ \frac{\sqrt{(k-1)\Lambda}}{6} (t - t_0) \right] \right\}^2. \quad (33)$$

Аналогічним чином можна виразити тиск:

$$8\pi p(t) = \frac{\Lambda}{24(k-1)} \left\{ (4k-7)\operatorname{csch}^2 \times \right. \\ \times \left[ \sqrt{\frac{(k-1)\Lambda}{6}} (t - t_0) \right] + 4(k-1)^2 \operatorname{sech}^2 \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{(k-1)\Lambda}{6}} (t - t_0) \right] + 4k^2 - 4k - 3 \left. \right\}. \quad (34)$$

Масштабний фактор цієї космологічної моделі визначається як

$$a(t) = a_0 \sinh^{2(k-1)} \left[ \sqrt{\frac{(k-1)\Lambda}{6}} (t - t_0) \right] \times \\ \times \cosh^{\sqrt{6}} \left[ \sqrt{\frac{(k-1)\Lambda}{6}} (t - t_0) \right]. \quad (35)$$

#### 4.2. Космологічна модель з лінійним рівнянням стану для темної енергії

Для другої космологічної моделі ми припускаємо, що темні компоненти задовольняють лінійному рівнянню стану

$$P_{\text{eff}}(z) = -\sigma(z)r_{\text{eff}}(z) + \lambda, \quad (36)$$

де  $\lambda$  є константою, а  $\sigma(z)$  задано параметризацією Шевальє–Полярського–Ліндера

$$\sigma(z) = \sigma_a + \sigma_0 \frac{z}{1+z}. \quad (37)$$

У цьому випадку рівняння еволюції Всесвіту задаються формулою

$$-2(1+z)h(z)\frac{dh(z)}{dz} + 3h^2(z) = 3\lambda + \\ + 3\sigma(z) [2h(z)\Omega(z) - \Omega^2(z)], \quad (38)$$

$$-2(1+z)h(z)\frac{d\Omega(z)}{dz} = 2[3\sigma(z) - 2]h(z)\Omega(z) + \\ + [1 - 3\sigma(z)]\Omega^2(z) + 3\lambda. \quad (39)$$

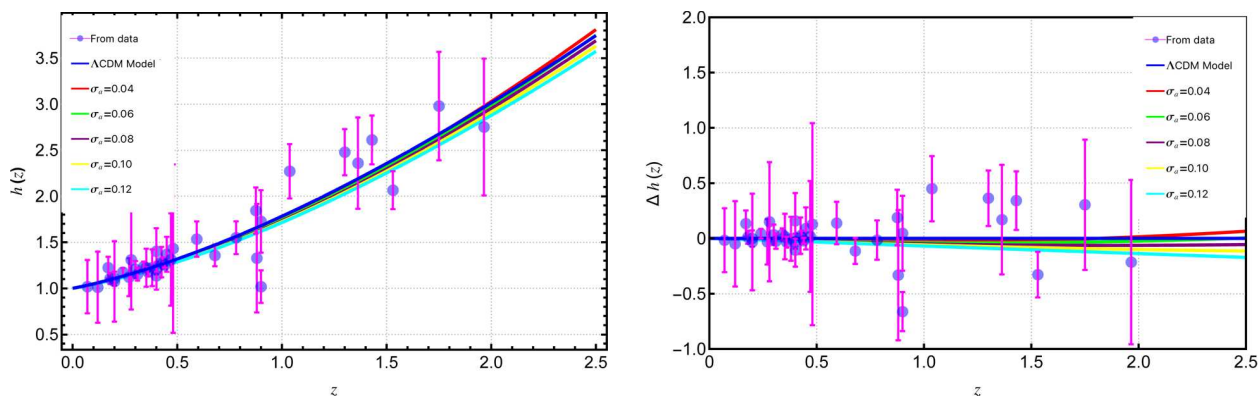
Систему рівнянь (37) і (38) необхідно розв'язувати чисельно з початковими умовами  $h(0) = 1$  і  $\Omega(0) = \Omega_0$ . Як би там не було, завершальне співвідношення визначає початкову умову  $\Omega_0$ , враховуючи сучасну густину речовини через формулу  $\Omega_0 = 1 + \sqrt{r(0)}$ .

Далі ми чисельно проінтегруємо диференціальні рівняння (37) і (38) та порівняємо передбачення теорії з тим, що дає модель з холодною темною матерією і  $\Lambda$ -членом ( $\Lambda$ CDM), в якій функція Хаббла задана у вигляді

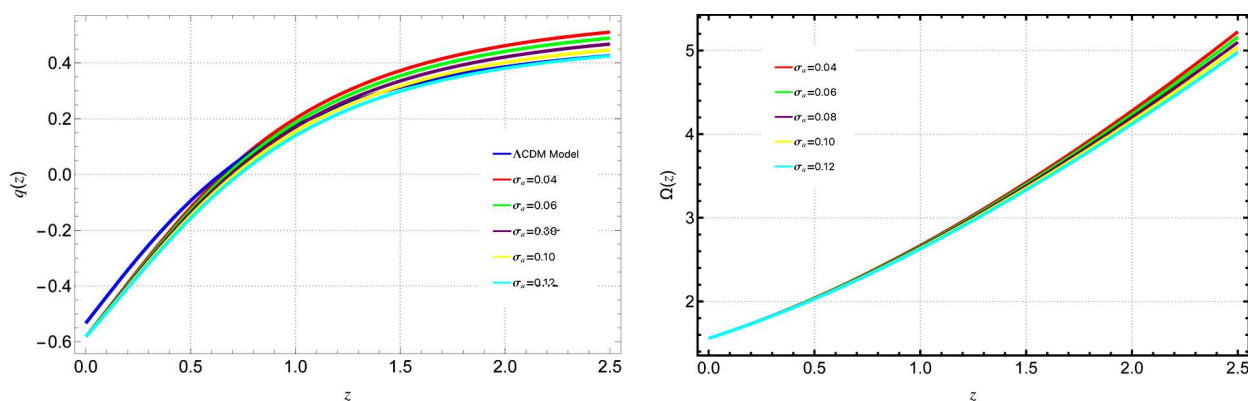
$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda} = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \quad (41)$$

де  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{\text{DM}}$ , з  $\Omega_b = \rho_b/\rho_{\text{cr}}$ ,  $\Omega_{\text{DM}} = \rho_{\text{DM}}/\rho_{\text{cr}}$  і  $\Omega_\Lambda = \Lambda/\rho_{\text{cr}}$ , а  $\rho_{\text{cr}}$  – критична густина Всесвіту. Параметр уповільнення задається співвідношенням

$$q(z) = \frac{3(1+z)^3\Omega_m}{2[\Omega_\Lambda + (1+z)^3\Omega_m]} - 1. \quad (42)$$



**Рис. 2.** Безрозмірна функція Хаббла як функція червоного зсуву  $z$  (ліва панель) і різниця між безрозмірними функціями Хаббла в даній моделі і моделі  $\Lambda$ CDM як функція  $z$  (права панель). Для моделі з лінійним рівнянням стану вибрано параметри  $\lambda = 0,79$ ,  $r(0) = 0,311$ ,  $\sigma_0 = -0,10$  із різними значеннями  $\sigma_a$



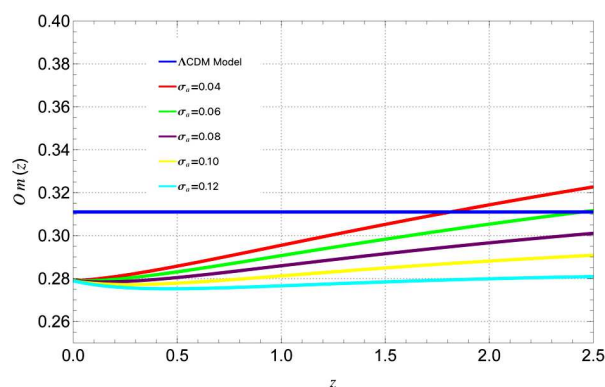
**Рис. 3.** Параметр уповільнення  $q(z)$  як функція червоного зсуву  $z$  (ліва панель) і вектор кручення параметрами  $\lambda = 0,79$ ,  $r(0) = 0,311$ ,  $\sigma_0 = -0,10$  для різних значень  $\sigma_a$

Для параметризації використано числові значення  $\Omega_m = 0,3075$ ,  $H_0 = 67,1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,6911$  [8]. Дані взято з [9].

Варіації функції Хаббла і різниці між функцією Хаббла даної моделі і функцією моделі  $\Lambda$ CDM зображені на рис. 2. Можна побачити, що для розглянутого діапазону параметрів модель із лінійним рівнянням стану може добре відтворювати як дані спостережень, так і передбачення стандартної моделі  $\Lambda$ CDM. Однак при більших червоних зсувах  $z > 2$  передбачення цієї моделі відрізняються від того, що дає модель з холодною темною матерією і  $\Lambda$ -членом ( $\Lambda$ CDM) і залежать від початкових умов.

Варіації параметра гальмування  $q(z)$  і вектора кручення  $\Omega(z)$  зображено на рис. 3.

Як видно на рис. 3, в інтервалі  $0 < z < 0,5$ , здається, є невеликі відхилення, наша модель перед-



**Рис. 4.** Поведінка функції  $Om(z)$  для моделі II, для  $\lambda = 0,79$ ,  $r(0) = 0,311$ ,  $\sigma_0 = -0,10$  і різних значень  $\sigma_a$

бачає дещо менший параметр уповільнення, ніж стандартна модель  $\Lambda$ CDM. З цього ж рисунка випливає, що кручення є зростаючою функцією чер-

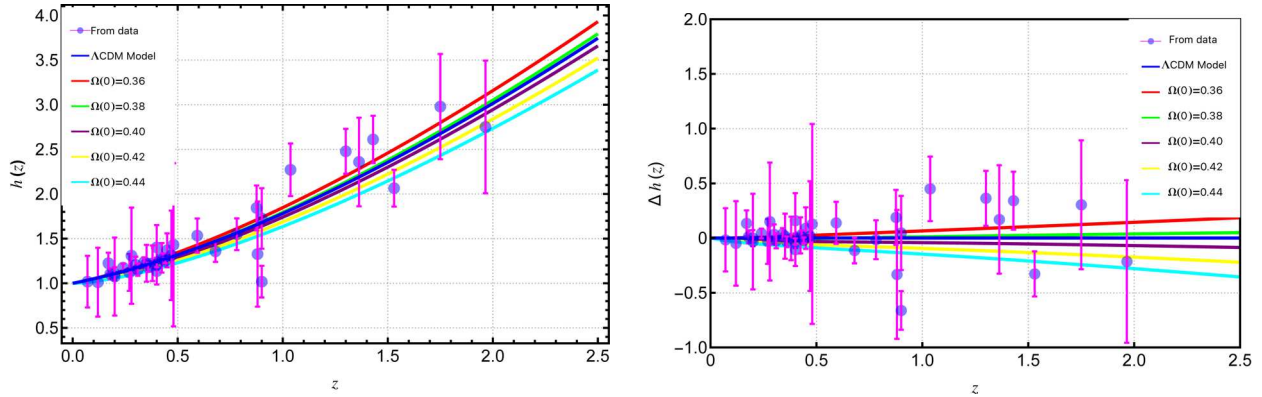


Рис. 5. Варіації безрозмірної функції Хаббла  $h(z)$  (ліва панель) і різниці  $\delta h(z)$  (права панель) для політропної моделі з  $K = -2$  і кількома різними початковими умовами  $\Omega_0$

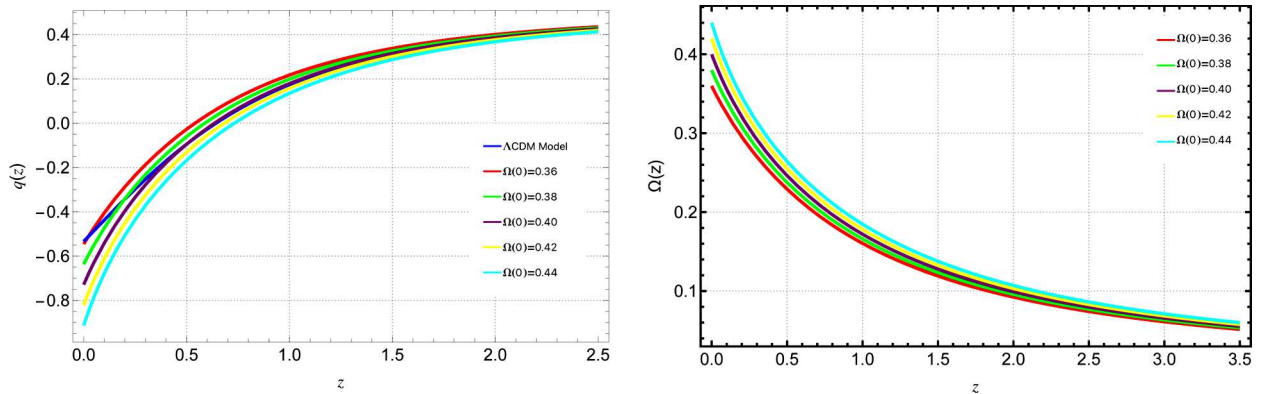


Рис. 6. Параметр уповільнення  $q(z)$  і вектор кручення  $\Omega(z)$  як функції червоного зсуву  $z$  у випадку політропної моделі з  $K = -2$  для кількох різних початкових значень  $\Omega(0)$

воного зсуву і приймає позитивні значення в процесі космологічної еволюції. Параметр  $\sigma_a$  децю змінює  $\Omega(z)$  лише для більших значень  $z > 2$ .

Поведінка функції  $Om(z)$  відображена на рис. 4. Вона суттєво відрізняється від того, що дає модель  $\Lambda$ CDM, вказуючи на можливість переходу між різними сценаріями процесу еволюції.

#### 4.3. Космологічна модель з політропним рівнянням стану для темної енергії

Третю космологічну модель ми будемо на основі політропного рівняння стану

$$P_{\text{eff}} = Kr_{\text{eff}}^2, \quad (43)$$

де  $K$  – константа. У цьому випадку космологічна еволюція Всесвіту описується системою рівнянь

$$-2(1+z)h(z)\frac{dh(z)}{dz} + 3h^2(z) - 4h(z)\Omega(z) +$$

$$+ \Omega^2(z) + 2(1+z)h(z)\frac{d\Omega(z)}{dz} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{1}{3} \left[ 4h(z)\Omega(z) - \Omega^2(z) - 2(1+z)h(z)\frac{d\Omega}{dz} \right] + K [2h(z)\Omega(z) - \Omega^2(z)]^2 = 0. \quad (45)$$

Наведену вище систему необхідно інтегрувати з початковими умовами  $h(0) = 1$  і  $\Omega(0) = \Omega_0$ . Після інтегрування ми отримуємо густину енергії речовини із співвідношенням замикання

$$r(z) = h^2(z) - 2h(z)\Omega(z) + \Omega^2(z). \quad (46)$$

Варіації як функція червоного зсуву  $z$  безрозмірної функції Хаббла  $h(z)$  і різниці  $\delta H(z)$  представлені для  $K = -2$  і різних значень  $\Omega(0)$  на рис. 5.

Як видно на рис. 5, політропна модель дуже добре описує як дані спостережень функції Хаббла,

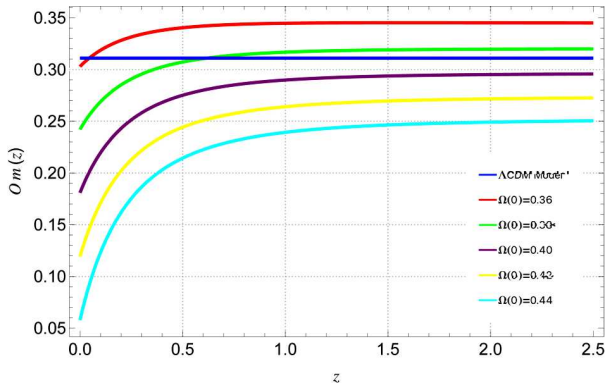


Рис. 7. Поведінка функції  $Om(z)$  для політропної моделі з  $K = -2$  і різними значеннями  $\Omega(0)$

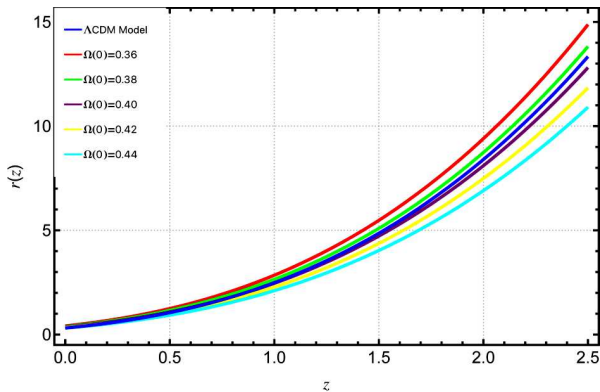


Рис. 8. Поведінка густини речовини  $r(z)$  як функції червоного зсуву  $z$  для політропної моделі з  $K = -2$  і різними значеннями  $\Omega(0)$

так і модель  $\Lambda$ СМД. Однак при червоному зсуві  $z > 1,5$  з'являються деякі невеликі відхилення від моделі з холодною темною матерією і  $\Lambda$ -членом.

Еволюцію параметра сповільнення  $q(z)$  і вектора кручення  $\Omega(z)$  зображено на рис. 6.

З рис. 6 ми можемо побачити, що невеликі відхилення параметра уповільнення з'являються в діапазоні червоного зсуву  $0 < z < 1,5$ , де наша модель передбачає трохи менші значення для уповільнення. Для  $z > 1,5$  передбачення нашої моделі і моделі  $\Lambda$ СМД в основному збігаються. Вектор кручення є спадною функцією червоного зсуву і приймає позитивні значення на інтервалі  $0 < z < 3,5$ . Вибране початкове значення не впливає на поведінку вектора кручення для великих значень червоного зсуву.

Діагностична функція  $Om(z)$  політропної моделі показана на рис. 7. Вона суттєво відрізняє-

ться від функції  $Om(z)$  моделі з холодною темною матерією і  $\Lambda$ -членом при менших червоних зміщеннях, оскільки це монотонно зростаюча функція замість константи. Однак при великих червоних зсувах вона асимптотично наближається до стало-го значення.

Сучасну густину речовини для випадку політропної моделі можна побачити на рис. 8. Прогнози цієї моделі і моделі  $\Lambda$ СМД в основному збігаються до  $z \simeq 1$ .

### 5. Підсумки і висновки

У цій статті ми досліджували геометричне розширення загальної теорії відносності, у тому числі кручення особливого типу, вперше представлене Фрідманом у 1924 році. Ми записали рівняння поля Ейнштейна в пост-рімановому представленні, підкреслюючи ефекти кручення. Щоб показати фізичну актуальність доданків, пов'язаних із крученням, ми розглянули три космологічні моделі, де ефективна темна енергія і тиск були пов'язані трьома різними рівняннями стану. Ми показали на основі якісних міркувань, що наша модель здатна відтворювати передбачення стандартної моделі  $\Lambda$ СМД і пояснювати дані спостережень без необхідності використання темної енергії.

Тим не менш, важливо зазначити, що наш аналіз має якісний характер, і для кількісних прогнозів потрібне детальне порівняння з більшими наборами даних, включно з аналізом МСМС, щоб звужити похибки для параметрів моделей.

Подальші перспективи поточної роботи включають, але не обмежуються:

1. Дослідження сферично симетричних розв'язків рівнянь поля у вакуумі або в присутності речовини. У напівсиметричній метричній гравітації можна досліджувати або моделі чорних дір, або зоряні структури.

2. Знаходження нерелятивістичної границі для наших рівнянь поля, щоб перевірити, чи може кручення пояснити криві обертання галактики, що зазвичай пояснюються із залученням темної матерії.

Загалом, ми завершуємо роботу ідеєю, що передбачена Фрідманом геометрія може бути ймовірною альтернативою до стандартної загальної теорії відносності, причому в такому підході темна енергія має суто геометричне походження.

Робота бібліотеки Конгресу США, підтримується Товариством талантів Угорщини і дослідницькою стипендією StarUBB.

1. A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zur Berlin, page 844, 1915.
2. C.M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity* **17**, 4 (2014).
3. B.P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
4. A. Friedmann, J.A. Schouten. Über die geometrie der halbsymmetrischen übertragung. *Math. Zeitschr.* **21**, 211 (1924).
5. J.A. Schouten. *Ricci Calculus: An Introduction to Tensor Analysis and Geometrical Applications* (Springer, 1954).
6. K. Yano. On semi-symmetric metric connection. *Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. Sci. Res.* **15**, 1579 (1970).
7. E. Zangiabadi, Z. Nazari. Semi-riemannian manifold with semi-symmetric connections. *J. Geometry and Physics* **169**, 104341 (2021).
8. Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown *et al.* Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astron. Astrophys.* **641**, A1 (2020).
9. A. Bouali, H. Chaudhary, T. Harko, F.S.N. Lobo, T. Ouali, M.A.S. Pinto. Observational constraints and cosmological implications of scalar-tensor  $f(R, T)$  gravity. *MNRAS* **526**, 4192 (2023).

Одержано 25.06.24.

Переклад на українську мову Ю.А. Куца

*L. Csillag, T. Harko*

#### SEMI-SYMMETRIC METRIC GRAVITY

We will study a geometric extension of general relativity, which is based on a connection with a special type of torsion. This connection satisfies that its torsion tensor is fully determined by a vectorial degree of freedom, and it was first introduced by Friedmann and Schouten. We explore its physical implications by presenting three cosmological models within the considered geometric extension of GR, and compare the predictions of the models with those of  $\Lambda$ CDM and the observational data of the Hubble function. Our results show that the geometry envisioned by Friedmann could explain the observational data for the Hubble function without the need of dark energy.

*Keywords:* cosmological models, semi-symmetric metric gravity, general relativity, torsion tensor, Hubble function.