

М.М. ЧЕПІЛКО, С.О. ПОНОМАРЕНКО

Навчально-науковий інститут аерокосмічних технологій  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”  
(Просп. Перемоги, 37, Київ 03056)

## УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ДРУДЕ–ЛОРЕНЦА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У МЕТАЛОПЛАЗМОНІЦІ

УДК 537.6/.8

*Узагальнено модель Друде–Лоренца на випадок плазмонів у немагнітних провідниках, що знаходяться у статичних магнітних  $\mathbf{H}_0$  та електричних  $\mathbf{E}_0$  полях із врахуванням ефектів просторової дисперсії. Показано, що магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  та просторова дисперсія формують два додаткові типи низькочастотних об'ємних плазмонів, а дисперсія всіх типів об'ємних плазмонів суттєво залежить від взаємної орієнтації напрямку їх розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  та вектора магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ . Що стосується поверхневих плазмонів, то тут просторова дисперсія приводить до двокомпонентної структури (в метали) їх електричного поля  $\mathbf{E}$ , а зовнішнє електростатичне поле  $\mathbf{E}_0$  – до наведеної просторової дисперсії, залежної від величини постійної Холла  $R_p$ . У той самий час, орієнтація магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  суттєво впливає на загальну дисперсію поверхневих плазмонів.*

*Ключові слова:* об'ємні плазмони, поверхневі плазмони, просторова дисперсія, магнітостатичне поле.

### 1. Вступ

Розвиток нано- та стелс-технологій, дизайн метаматеріалів підтримує актуальність досліджень фізичних властивостей плазмонів у металах та напівпровідниках (див. [1–12] та цитовану там літературу). Враховуючи природу плазмонів, як макроскопічних коливань густини вільних електричних зарядів, зазвичай для їх теоретичного опису використовують методи електродинаміки суцільних середовищ з матеріальними параметрами Друде–Лоренца [1, 2, 14–18].

Застосування моделі Друде–Лоренца у теорії плазмонів має довгу історію [1, 2, 14–18] і, незважаючи на її простоту, ця модель є досить ефективною і донині використовується у плазмоніці суцільних середовищ [1–12].

У цій роботі ми покажемо, що можливості моделі Друде–Лоренца обмежені коли виникає потреба

врахувати зовнішні впливи на фізичні властивості плазмонів та ефекти просторової дисперсії (хвильові властивості плазмонів), що є важливим для прикладних застосувань плазмонних явищ. Природньо використати для управління характеристиками плазмонів квазістатичні магнітні  $\mathbf{H}_0$  та електричні  $\mathbf{E}_0$  поля.

Метою даної роботи є узагальнення моделі Друде–Лоренца на випадок плазмонів у немагнітних кристалах, що знаходяться у статичних магнітних  $\mathbf{H}_0$  і електричних  $\mathbf{E}_0$  полях, з врахуванням просторової дисперсії та дослідження на цій основі орієнтаційних ефектів, які зумовлені зміною напрямку розповсюдження плазмонів відносно напрямку магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Відзначимо, що поведінка плазмонів у магнітостатичних полях розглядалася, зокрема, у роботах [4–10] для спеціальних фіксованих геометрій. Що стосується систематичного дослідження орієнтаційних ефектів у динаміці плазмонів, які зу-

мовлені магнітостатичним полем та просторовою дисперсією, то ці питання у науковій літературі не обговорювалися.

Показано, що магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  та просторова дисперсія формують два додаткові типи низькочастотних об'ємних плазмонів, а циклічна частота всіх трьох типів об'ємних плазмонів залежить від напрямку їх розповсюдження відносно напрямку магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Що стосується поверхневих плазмонів, то тут просторова дисперсія призводить до двокомпонентної структури (у метали) їх електричного поля  $\mathbf{E}$ , а зовнішнє електростатичне поле  $\mathbf{E}_0$  – до наведеної просторової дисперсії залежної від величини постійної Холла  $R_p$ . У той же час, орієнтація магнітного поля  $\mathbf{H}_0$  суттєво впливає на загальну дисперсію поверхневих плазмонів.

Ілюстративні розрахунки у даній роботі виконані на прикладі антимоніду індію (напівпровідник InSb  $n$ -типу з вузькою забороненою зоною порядку 0,18 eВ), який завдяки своїм унікальним фізичним властивостям [13] має широке застосування у електроніці та приладобудуванні. Метою цих розрахунків було формування цілісної картини орієнтаційної динаміки плазмонів, яка у фур'є-просторі описується дисперсійним рівнянням плазмонів.

При розрахунках використовувалися такі параметри антимоніду індію, як концентрація електронів  $n_e \simeq 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , їх ефективна маса  $m^* \simeq 0,014 \cdot m_e$  ( $m_e$  – маса вільного електрона), рухомість електронів  $u_e \simeq 7,8 \cdot 10^5 \text{ см}^2(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ , що були визначені [13] при температурах порядку  $T = 300 \text{ К}$ . Що стосується дірок в антимоніді індію, то тут їх ефективна маса на два порядки [13] більша за ефективну масу електронів і тому вони мало впливають на загальні кінетичні властивості [15, 16] носіїв електричного заряду (це дозволяє використати антимонід індію у даній роботі як модельний об'єкт). За цих параметрів плазмова циклічна частота [1, 2, 13] в антимоніді індію  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m^*}} \simeq 6,74 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$  буде на три порядки нижчою, ніж у більшості металів. Параметр затухання плазмонів в антимоніді індію по порядку величини буде рівним [16, 17]  $\gamma = \frac{v_F}{2l_e}$ ,  $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m^*}} \simeq 9,73 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , де  $E_F$  – енергія Фермі, а  $l_e$  – довжина вільного пробігу електронів. Внаслідок рекордного значення рухомості е-

ктронів  $u_e$  [13] параметр  $l_e$  на 2–3 порядки перевищує постійну ґратки в InSb, що у свою чергу призводить до нерівності  $\gamma \simeq 4,8 \cdot (10^9 - 10^{10}) \text{ с}^{-1} \ll \omega_p$ .

Постійна Дебая, згідно з літературними даними [13], в антимоніді індію становить величину порядку  $r_D \simeq (10^{-4} - 10^{-5}) \text{ см}$ .

Циклотронну частоту  $\omega_H$  при розрахунках виберемо на порядок нижчою, ніж плазмова циклічна частота  $\omega_p$  в антимоніді індію, що буде відповідати терагерцовому діапазону ( $\omega = 9,42 \cdot (10^{11} - 10^{12}) \text{ с}^{-1}$ ) електромагнітних хвиль у реальних магнітних полях ( $H_0 \simeq 10^3 - 10^5$  ерстед).

## 2. Узагальнення моделі Друде–Лоренца на випадок металу в однорідному магнітостатичному полі з врахуванням ефектів просторової дисперсії

Запишемо диференціальний закон збереження електричного заряду

$$\nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{j} = en_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \rho = e(n_0 + \delta n_e), \quad (1)$$

де  $e$  – заряд електрона,  $n_0$  – середня концентрація електронів у металевому зразку,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  – локальне зміщення електрона із стану рівноваги,  $\delta n_e = \delta n_e(\mathbf{r}, t)$  – варіація концентрації електронів під дією тих чи інших збурень.

З (1) знаходимо, що

$$\delta n_e = -n_0(\nabla \mathbf{q}). \quad (2)$$

З курсу загальної фізики відомий зв'язок тиску ідеального газу та концентрації матеріальних точок у ролі яких, у даному випадку, виступають електрони

$$\begin{aligned} \delta p_e &= \frac{2}{3} \left\langle \frac{m^* \mathbf{v}_e^2}{2} \right\rangle \delta n_e, \\ \delta \mathbf{f}_e &= -\nabla \delta p_e = \frac{2}{3} n_0 \left\langle \frac{m^* \mathbf{v}_e^2}{2} \right\rangle \nabla^2 \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\delta \mathbf{f}_e$  – внутрішня густина сили, яка зумовлена хвилями електронної густини.

Формули (3) будуть справедливими у випадку невиродженого електронного газу. Але, оскільки у реальних металах електронний газ вироджений, то згідно з [15, 16] необхідна наступна редукція варі-

ації тиску  $\delta p_e$  та похідних від неї величин:

$$\frac{2}{3}n_0\left\langle\frac{m^*\mathbf{v}_e^2}{2}\right\rangle\rightarrow m^*u_p^2, \quad \delta\mathbf{f}_e = m^*u_p^2\nabla^2\mathbf{q}, \quad (4)$$

$$u_p = \omega_p r_D, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m^*},$$

де  $\omega_p$  – плазмова циклічна частота,  $r_D$  – дебаєвський радіус екранування електронів у металі.

Враховуючи вираз для  $\delta\mathbf{f}_e$  (див. (4)) динамічне рівняння для питомої поляризації металу  $\mathbf{P} = \epsilon n_0 \mathbf{q}$  у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\omega_0^2 - u_p^2 \nabla^2) \mathbf{P} - \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \boldsymbol{\omega}_H \right) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_H = \frac{e \mathbf{H}_0}{m^* c}, \quad (5)$$

де електричне поле плазмонів  $\mathbf{E}$  визначається рівняннями Максвелла (див. далі),  $\gamma$  – параметр дисипації плазмонів,  $\boldsymbol{\omega}_H$  – вектор циклотронної частоти,  $(\omega_0^2 - u_p^2 \nabla^2)$  – вираз, що описує хвильовий характер розповсюдження плазмонів (просторову дисперсію плазмонів). У більшості реальних металів  $\omega_0^2 \rightarrow 0$ .

Хвильове рівняння (5) потрібно доповнити граничною умовою, в ролі якої природньо виступає рівність нулю нормальної компоненти вектора густини плазмонного електричного струму  $\mathbf{j}$  на поверхні металу:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \Big|_{r \in S} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (6)$$

де  $S$  – поверхня металу.

Електричне поле плазмонів  $\mathbf{E}$  та поляризацію металу  $\mathbf{P}$  апроксимуємо плоскими монохроматичними хвилями:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к.с.}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (7)$$

Після підстановки виразів (7) до динамічного рівняння (5), отримаємо алгебраїчне рівняння, яке зв'язує між собою амплітуди хвиль електричного поля та поляризації металу:

$$\begin{aligned} -(\omega^2 - \omega_k^2 + 2i\gamma\omega)\mathbf{P}_0 + i\omega(\mathbf{P}_0 \times \boldsymbol{\omega}_H) &= \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}_0, \quad (8) \\ \omega_k^2 &= \omega_0^2 + u_p^2 \mathbf{k}^2, \end{aligned}$$

яке у матричній формі запису набуває вигляду

$$D_{\alpha\beta} P_0^\beta = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{0\alpha}, \quad (9)$$

де матриця  $|D_{\alpha\beta}|$  має таку структуру:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta}^{(s)} + iD_{\alpha\beta}^{(a)}, \\ D_{\alpha\beta}^{(s)} &= -D_0 \delta_{\alpha\beta}, \quad D_{\alpha\beta}^{(a)} = \omega e_{\alpha\beta\gamma} \omega_H^\gamma, \\ D_0 &= (\omega^2 - \omega_k^2 + 2i\gamma\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут і далі  $\delta_{\alpha\beta}$ ,  $e_{\alpha\beta\gamma}$  – символи Кронекера та Леві–Чівіті у плоскому тривимірному просторі.

Загальний розв'язок матричного рівняння (9) має такий вигляд:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \hat{D}^{-1} \mathbf{E}_0, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}_{\alpha\beta} &= -\frac{D_0}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2} \delta_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\omega^2 \omega_{H\alpha} \omega_{H\beta}}{D_0(D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2)} - i \frac{\omega e_{\alpha\beta\gamma} \omega_H^\gamma}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Враховуючи (12) у (11), отримуємо вираз для амплітуди вектора питомої поляризації металу

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= -\frac{\omega_p^2}{4\pi} \left( \frac{D_0 \mathbf{E}_0}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2} - \right. \\ &\left. - \frac{\omega^2 \omega_H (\boldsymbol{\omega}_H \cdot \mathbf{E}_0)}{D_0(D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2)} - i \frac{\omega (\boldsymbol{\omega}_H \times \mathbf{E}_0)}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Із (13) видно, що магнітне поле  $\mathbf{H}_0$  викликає додаткову поляризацію металу, причому третій доданок у (13) вказує на наведений магнітним полем  $\mathbf{H}_0$  гіроскопічний ефект [18].

Тензор діелектричної проникливості металу  $|\epsilon_{\alpha\beta}|$  визначається звичайним чином через матрицю  $|D^{-1}|$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}, \quad \chi_{\alpha\beta} = \omega_p^2 D^{-1}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}). \quad (14)$$

Залежність тензора  $|\epsilon_{\alpha\beta}|$  від хвильового вектора  $\mathbf{k}$  означає врахування ефектів просторової дисперсії плазмонів.

У відсутності магнітного поля, коли  $\boldsymbol{\omega}_H \rightarrow 0$ , та нехтовно малій просторовій дисперсії вираз (12)

зводиться до діелектричної проникливості металу у стандартній моделі Друде–Лоренца [1, 2]:

$$\omega_H \rightarrow 0, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \rightarrow \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + 2i\gamma)}\right) \delta_{\alpha\beta}. \quad (15)$$

Тензорний зв'язок (13) між поляризацією металу і електричним полем плазмонів вносить якісні особливості (див. далі) в їх магнітодинаміку. Зокрема в оптиці металів з тензором діелектричної проникливості (14) слід чекати явищ [18] двопробеневого заломлення та оптичної активності.

### 3. Граничні умови на межі поділу метал–діелектрик у зовнішньому статичному електромагнітному полі

Далі ми будемо розглядати поверхневі плазмони на межі поділу діелектрик–метал. При цьому, практично важливим прикладним питанням є вивчення механізмів впливу зовнішніх факторів на значення частоти поверхневих плазмонів. Зокрема, статичних електричних  $\mathbf{E}_0$  та магнітних  $\mathbf{H}_0$  полів.

Під дією електростатичного поля  $\mathbf{E}_0$  на поверхні металу з'являються [17] поверхневі електричні заряди

$$\rho_s = \sigma \delta(\mathbf{n} \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in S}, \quad \sigma = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_0 \mathbf{n}) \Big|_{\mathbf{r} \in S}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до поверхні металу  $S$ .

В цій роботі ми розглядаємо випадок перпендикулярного до поверхні металу електростатичного поля  $\mathbf{E}_0$ . У протилежному випадку у металі буде виникати електричний струм, який, в свою чергу, у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  приведе до появи на поверхні металу електричних зарядів, пов'язаних з ефектом Холла. Їх роль у теорії поверхневих плазмонів ми розглянемо у наступній роботі.

На динаміку об'ємних плазмонів виникнення поверхневих зарядів особливого впливу не має, але разом з тим вони призводять до редукції граничних умов [17] на поверхні металу для вектора індукції електричного поля  $\mathbf{D}$  та напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$ , що є суттєвим у теорії поверхневих плазмон-поляритонів.

Редукцію граничних умов, пов'язану з наведеними поверхневими зарядами (16), можна описати

за допомогою такої редукції вектора індукції електричного поля  $\mathbf{D}$  плазмон-поляритонів:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\rightarrow \mathbf{D} + 4\pi \mathbf{P}_s \delta(\mathbf{n} \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in S}, \\ \mathbf{P}_s &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_0 \mathbf{n}) \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r} \in S}, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\mathbf{P}_s$  – вектор локальної (поверхневої) поляризації, який визначається густиною поверхневих зарядів (16). Його динамічне рівняння на поверхні металу можна отримати шляхом редукції рівняння для об'ємної поляризації металу у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_s}{\partial t^2} + 2\gamma_s \frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t} + (\omega_s^2 - u_s^2 \nabla_s^2) \mathbf{P}_s - \\ - \left( \frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t} \times \boldsymbol{\omega}_H \right) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} (\sigma R_p) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $R_p = \frac{1}{\epsilon_{no}}$  – постійна Холла. Індекс  $s$  у (18) вказує на те, що всі величини у (18) перенормовуються до їх значень у приповерхневій області металу. При цьому, оператор  $\nabla_s^2 = (\nabla \hat{n} \nabla)$  діє лише у площині, дотичній до поверхні металу. Тут і далі  $n_{\alpha\beta} = \mathbf{n}^2 \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$  – тензор проєкціювання векторів на поверхню металу.

Що стосується розв'язків рівняння (18), то їх можна отримати шляхом перепозначень у формулах (13), (14). За цим алгоритмом знайдемо локальну поляризацію  $\mathbf{P}_s$  та густину електричного струму  $\mathbf{j}_s$  на поверхні металу у такому вигляді:

$$\mathbf{P}_s = \frac{1}{4\pi} \hat{\chi}^{(s)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_s = \frac{\omega}{4\pi i} \mathbf{P}_s, \quad (19)$$

де  $\hat{\chi}^{(s)} = \frac{R_p}{4\pi} (\mathbf{n} \mathbf{E}_0) \hat{\chi}(\omega, \mathbf{k}_s)$  – поверхнева поляризуємість металу, у виразі для якої  $\gamma \rightarrow \gamma_s$ , а хвильовий вектор  $\mathbf{k}_s$  у (20) є дотичним до поверхні металу.

Наведені зовнішнім електричним полем поверхневі поляризація  $\mathbf{P}_s$  та електричний струм  $\mathbf{j}_s$  змінюють граничні умови [17] для нормальних компонент електричної індукції  $\mathbf{D}$  та тангенціальних компонент напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$  плазмонів. Щоб отримати потрібні граничні умови необхідно звичайним чином [17] опрацювати такі рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} (\nabla (\mathbf{D} + 4\pi \mathbf{P}_s \delta(\mathbf{n} \mathbf{r}))) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow (\nabla \mathbf{D}) + 4\pi (\nabla \hat{n} \mathbf{P}_s) \delta(\mathbf{n} \mathbf{r}) = 0; \\ (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t} \delta(\mathbf{n} \mathbf{r}). \end{cases} \quad (20)$$

В результаті отримуємо відповідні постановці задачі граничні умови

$$\begin{cases} ((\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}) \mathbf{n}) = -4\pi(\nabla \hat{n} \mathbf{P}_s); \\ ((\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) \times \mathbf{n}) = \frac{4\pi}{c} \left( \hat{n} \frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Індекси (1) та (2) у (21) відмічають відповідно діелектрик та метал.

Залежність граничних умов (21) від наведених зовнішнім електричним полем  $\mathbf{E}_0$  поверхневих зарядів (16) суттєво впливає на дисперсію поверхневих плазмонів та плазмон-поляритонів (див. далі).

У випадку діелектрика вплив електростатичного поля  $\mathbf{E}_0$  на його тензор діелектричної проникливості зазвичай описується [17] таким виразом:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \simeq \varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta} + \chi^{(2)}_{\alpha\beta\nu} E_0^\nu + \chi^{(2)}_{\alpha\beta\nu\mu} E_0^\nu E_0^\mu + \dots, \quad (22)$$

де першому доданку справа відповідає звичайний тензор діелектричної проникливості діелектрика, другий – відповідає ефекту Поккельса, а третій – ефекту Керра. При цьому треба мати на увазі те, що ефекти Поккельса та Керра, як правило, призводять до анізотропії діелектрика.

Таким чином, магнітостатичне поле, виникнення наведених зарядів на поверхні металу і ефекти Поккельса та Керра, у тій чи іншій комбінації, відкривають перспективу зовнішнього керування частотою поверхневих плазмонів.

#### 4. Об'ємні плазмони

Електромагнітне поле плазмон-поляритонів, яке апроксимується плоскими монохроматичними хвилями

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к.с.}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к.с.}, \end{cases} \quad (23)$$

при врахуванні ефектів анізотропії та просторової дисперсії задовольняє рівняння Максвелла

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & (\mathbf{k} \mathbf{B}) = 0; \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, & (\mathbf{k} \mathbf{D}) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

матеріальним співвідношенням

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \hat{\mu}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{H}; \\ \mathbf{D} = \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E} \end{cases} \quad (25)$$

та відповідному їм дисперсійному рівнянню, яке має такий вигляд

$$\begin{aligned} & (\mathbf{k} \hat{\eta} \mathbf{k}) \mathbf{k}^2 - q_0^2 (\text{Tr}(\hat{\eta})) (\mathbf{k} \hat{\eta} \mathbf{k}) - \\ & - (\mathbf{k} \hat{\eta} \hat{\eta} \mathbf{k}) + q_0^4 \det(\hat{\eta}) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

де  $\hat{\eta} = \hat{\mu} \hat{\varepsilon}$ ,  $q_0 = \frac{\omega}{c}$ .

В немагнітних середовищах, які ми будемо далі розглядати,  $\hat{\mu}(\omega, \mathbf{k}) = 1$ .

Електричне поле об'ємних плазмонів задовольняє спрощені рівняння Максвелла

$$\begin{cases} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = 0, & (\mathbf{k} \mathbf{B}) = 0; \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = 0, & (\mathbf{k} \mathbf{D}) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

які можна отримати з (24), якщо не враховувати там ефекти запізнення ( $c \rightarrow \infty$ ). Ці рівняння мають такий розв'язок

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{k} A_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) + \text{к.с.}, \\ (\mathbf{k} \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{k}) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

де  $A_0$  постійна інтегрування.

Що стосується плазмон-поляритонів, то їх ми розглянемо у наступній роботі.

В загальному випадку, враховуючи структуру діелектричної проникливості (див. (12)), дисперсійне рівняння об'ємних плазмонів у (28) при  $\gamma = 0$  можна переписати у вигляді кубічного рівняння відносно величини  $\omega^2$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega_k^2)^3 - \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_k^2)^2 - \\ & - \omega^2 (\omega_H^2 (\omega^2 - \omega_k^2) - \omega_p^2 (\omega_H \mathbf{e}_k)^2) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

яке має три дійсні розв'язки. Тут і далі  $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ .

В безрозмірних змінних

$$w = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad w_k = \frac{\omega_k}{\omega_p} = r_D |\mathbf{k}|, \quad \mathbf{w}_H = \frac{\omega_H}{\omega_p} \quad (30)$$

рівняння (29) можна переписати у більш зручному для аналізу вигляді

$$\begin{aligned} & (w^2 - w_k^2)^3 - (w^2 - w_k^2)^2 - \\ & - w^2 (\mathbf{w}_H^2 (w^2 - w_k^2) - (\mathbf{w}_H \mathbf{e}_k)^2) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Спочатку розглянемо ряд спрощень дисперсійного рівняння (31).

**4.1. Магнітне поле відсутнє  
 $\mathbf{w}_H = 0$ , а просторова дисперсія  
 є суттєвою  $w_k \neq 0$**

В цьому випадку рівняння (31) набуває вигляду

$$(w^2 - w_k^2 - 1)(w^2 - w_k^2)^2 = 0. \quad (32)$$

В результаті отримуємо два розв'язки рівняння (32), яким відповідають високочастотні (діапазон оптичних частот)  $\omega_1$  та низькочастотні (діапазон

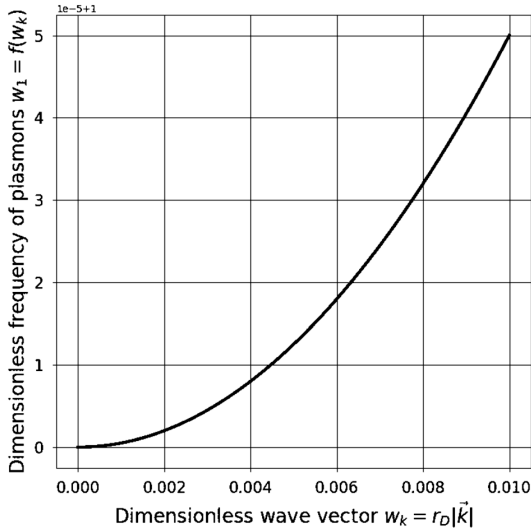


Рис. 1. Просторова дисперсія високочастотних об'ємних плазмонів

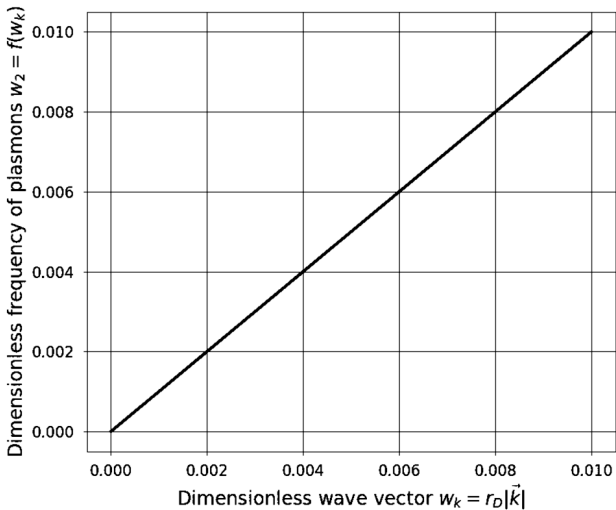


Рис. 2. Просторова дисперсія низькочастотних об'ємних плазмонів

ЗВЧ)  $\omega_2$  об'ємні плазмони (див. рис. 1 та 2):

$$\begin{cases} w_1^2 = 1 + w_k^2; \\ w_2^2 = w_k^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_p^2 + \omega_k^2; \\ \omega_2^2 = \omega_k^2. \end{cases} \quad (33)$$

Звернемо увагу на те, що опис плазмонів з частотою  $\omega_1$  при  $\mathbf{k} = 0$  зводиться до таких, що розглядаються у стандартній моделі Друде–Лоренца [1, 2], а існування низькочастотних плазмонів з частотою  $\omega_2$  пов'язане виключно з просторовою дисперсією, яка, у свою чергу, визначається дебаєвським радіусом  $r_D$  екранування електронів у металі.

**4.2. Просторова дисперсія  
 нехтовно мала  $w_k \ll 1$ , а магнітне  
 поле є суттєвим  $\mathbf{w}_H \neq 0$**

В цьому випадку рівняння (31) набуває вигляду

$$w^4 - (1 + \mathbf{w}_H^2)w^2 + (\mathbf{w}_H \mathbf{e}_k)^2 = 0. \quad (34)$$

В результаті отримуємо розв'язки рівняння (34)

$$\begin{cases} w_1^2 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{w}_H^2) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \mathbf{w}_H^2)^2 - 4(\mathbf{w}_H \mathbf{e}_k)^2}; \\ w_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{w}_H^2) - \\ - \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \mathbf{w}_H^2)^2 - 4(\mathbf{w}_H \mathbf{e}_k)^2}, \end{cases} \quad (35)$$

або у фізичних змінних

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + \omega_H^2) + \\ + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_p^2 + \omega_H^2)^2 - 4\omega_p^2(\omega_H \mathbf{e}_k)^2}; \\ \omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + \omega_H^2) - \\ - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_p^2 + \omega_H^2)^2 - 4\omega_p^2(\omega_H \mathbf{e}_k)^2}. \end{cases} \quad (36)$$

Із (36) видно, що частоти високочастотних  $\omega_1$  та низькочастотних  $\omega_2$  об'ємних плазмонів суттєво залежать від взаємної орієнтації їх напрямку розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  та магнітного поля  $\mathbf{H}_0$  (див. рис. 3 та 4). У двох граничних випадках будемо мати

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_p^2; \\ \omega_2^2 = \omega_H^2, \end{cases} \text{ при } (\omega_H \mathbf{e}_k) = 0, \quad (37)$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_p^2 + \omega_H^2; \\ \omega_2^2 = 0, \end{cases} \text{ при } (\omega_H \mathbf{e}_k) = \pm|\omega_H|. \quad (38)$$

Таким чином, ми встановили, що варіація частот обох плазмонів за рахунок зміни взаємної орієнтації напрямку їх розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  та магнітного поля  $\mathbf{H}_0$  відбувається у проміжку  $(0, |\omega_H|)$ .

Звернемо увагу також та те, що опис плазмонів з частотою  $\omega_1$  при  $\mathbf{H}_0 = 0$  зводиться до таких, що розглядаються у стандартній моделі Друде–Лоренца [1, 2] (діапазон оптичних частот), а існування низькочастотних плазмонів (діапазон ЗВЧ) з частотою  $\omega_2$  пов'язане виключно із особливістю взаємодії електронів з магнітним полем  $\mathbf{H}_0$ .

У даному випадку зв'язок між індукцією  $\mathbf{D}$  і електричним полем  $\mathbf{E}$  плазмонів носить суттєво тензорний характер. Тому виникнення низькочастотних плазмонів дозволяє нам провести аналогію з двохпроменевим заломленням в оптиці анізотропних кристалів.

### 4.3. Загальний випадок об'ємних плазмонів

У загальному випадку дисперсійне рівняння об'ємних плазмонів (31) зводиться до поліному 3-го ступеня і тим самим має три розв'язки (див. Fig. 5–7). Цілком зрозуміло, що їм відповідають плазмони, відомі із стандартної моделі Друде–Лоренца [1, 2] (високочастотні плазмони) і додаткові плазмони, наведені зовнішнім магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$  (низькочастотні плазмони) та просторовою дисперсією (акустичні плазмони).

Із рис. 5 та рис. 6 видно, що просторова дисперсія слабо впливає на динаміку високо- та низькочастотних плазмонів. У той самий час, вплив магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на динаміку акустичних плазмонів є суттєвим при взаємно ортогональній орієнтації векторів  $\mathbf{k}$  і  $\mathbf{H}_0$  (див. рис. 7)), коли дія Лоренца на них досягає максимуму.

Очевидно, що низькочастотні плазмони призводять до додаткових зон прозорості металу для електромагнітних хвиль, що може мати прикладне значення для плазмоніки.

### 5. Поверхневі плазмони на межі поділу анізотропних середовищ метал–діелектрик

Межа поділу метал–діелектрик у декартовій системі координат  $\{0, X, Y, Z\}$  визначається умовою  $\mathbf{r} \in (r_x, r_y, 0)$ .  $\varepsilon, \epsilon$  – діелектричні проникливості ді-

електрика та немагнітного металу ( $\hat{\mu} = 1$ ), які займають напіпростори  $z > 0$  та  $z < 0$  відповідно.

В такій геометрії наближені електричні поля поверхневих плазмонів без врахування ефектів зацінення ( $c \rightarrow \infty$ ) будуть колінеарними своїм хвильовим векторам  $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{k}, i\alpha)$  у випадку діелектри-

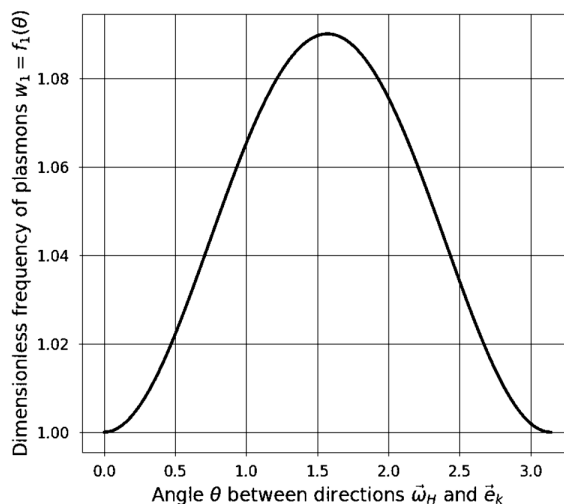


Рис. 3. Вплив напрямку розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  високо-частотних об'ємних плазмонів відносно напрямку вектора магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) на їх циклічну частоту  $\omega$

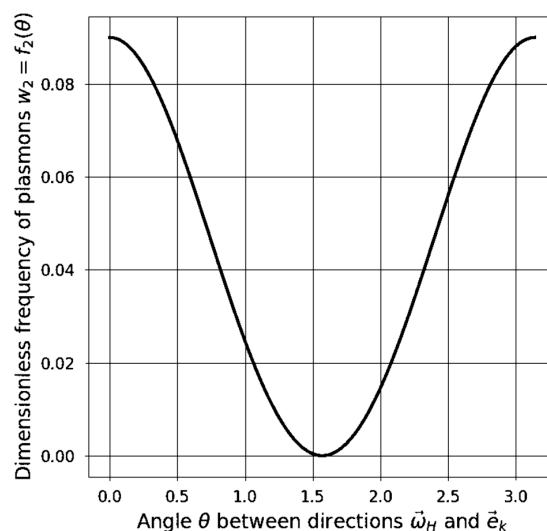


Рис. 4. Вплив напрямку розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  низькочастотних об'ємних плазмонів відносно напрямку вектора магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) на їх циклічну частоту  $\omega$

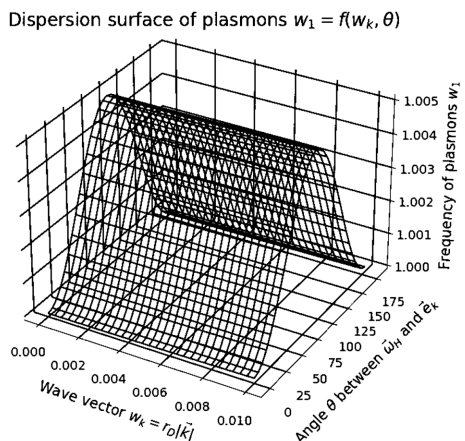


Рис. 5. Вплив магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на дисперсію високочастотних об'ємних плазмонів

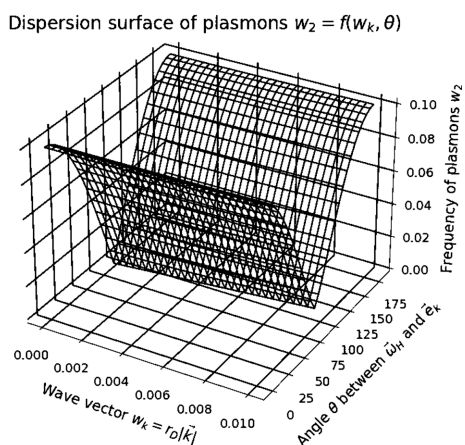


Рис. 6. Вплив магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на дисперсію низькочастотних об'ємних плазмонів

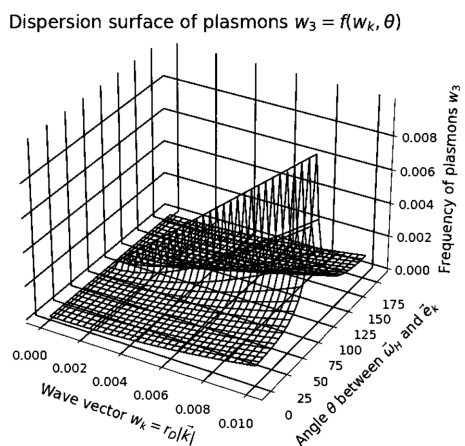


Рис. 7. Вплив магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на дисперсію акустичних об'ємних плазмонів

ка та  $\mathbf{P}_1 = (\mathbf{k}, -i\beta)$  у випадку металу, тобто

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{P}_0 A \exp(i(\mathbf{P}_0 \mathbf{r} - \omega t)) & \text{при } z > 0; \\ \mathbf{P}_1 B \exp(i(\mathbf{P}_1 \mathbf{r} - \omega t)) & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad (39)$$

де  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ .

Величини  $\alpha$  та  $\beta$  описують темп спадання електричного поля при віддаленні від межі поділу двох середовищ і визначаються дисперсійними рівняннями

$$(\mathbf{P}_0 \hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{P}_0) \mathbf{P}_0) = 0, \quad (\mathbf{P}_1 \hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_1) = 0 \quad (40)$$

аналогічними (28).

Далі ми вважатимемо контактуючий з металом діелектрик ізотропним лінійним кристалом з діелектричною проникливістю  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon \delta_{\alpha\beta}$  і розглянемо ряд спеціальних випадків.

### 5.1. Просторова дисперсія у теорії поверхневих плазмонів при відсутності статичного електромагнітного поля

Проаналізуємо роль просторової дисперсії у теорії поверхневих плазмонів при відсутності статичного електромагнітного поля ( $\mathbf{H}_0 = 0, \mathbf{E}_0 = 0$ ). За цих умов рівняння (40) будуть мати такі розв'язки:

$$\alpha = |\mathbf{k}|, \quad \beta_1 = |\mathbf{k}|, \quad \beta_2 = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega_k^2}}. \quad (41)$$

Наявність двох значень для параметра  $\beta$  ускладнює структуру електричного поля поверхневих плазмонів, оскільки у металі їх електричне поле стає двокомпонентним

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{P}_0 A \exp(i(\mathbf{P}_0 \mathbf{r} - \omega t)) & \text{при } z > 0; \\ \mathbf{P}_1 B_1 \exp(i(\mathbf{P}_1 \mathbf{r} - \omega t)) + \\ + \mathbf{P}_2 B_2 \exp(i(\mathbf{P}_2 \mathbf{r} - \omega t)) & \text{при } z < 0. \end{cases} \quad (42)$$

В цьому випадку електростатичних граничних умов буде недостатньо. В ролі додаткової граничної умови використаємо граничну умову для вектора густини електричного струму (5). Далі враховуючи, що при  $\mathbf{P}_1^2 = 0$   $\epsilon(\omega, \mathbf{P}_1) = \epsilon_1(\omega)$  та те, що  $\epsilon(\omega, \mathbf{P}_2) = 0$ , отримуємо замкнуту систему граничних умов у такому вигляді:

$$\begin{cases} A - B_1 - B_2 = 0; \\ \alpha \epsilon A + \beta_1 \epsilon_1 B_1 = 0; \\ \beta_1 (\epsilon_1 - 1) B_1 - \beta_2 B_2 = 0. \end{cases} \quad (43)$$



Із умови нетривіальності розв'язку системи лінійних рівнянь (43) знайдемо дисперсійне рівняння поверхневих плазмонів з врахуванням ефектів просторової дисперсії

$$(\alpha\varepsilon + \beta_1\varepsilon_1)\beta_2 + \alpha\varepsilon(\varepsilon_1 - 1)\beta_1 = 0, \quad (44)$$

яке у безрозмірних змінних (31) можна конкретизувати таким чином:

$$((\varepsilon + 1)w^2 - 1)\sqrt{1 + w_k^2 - w^2} - \varepsilon w_k = 0. \quad (45)$$

Це рівняння із трьох розв'язків має два таких, що мають фізичний зміст:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{\varepsilon + 1} + \frac{w_k^2}{2} + w_k \sqrt{\left(\frac{w_k}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}}; \\ \omega_3^2 = 1. \end{cases} \quad (46)$$

У фізичних змінних їх можна записати таким чином:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{\omega_p^2}{\varepsilon + 1} + \frac{\omega_k^2}{2} + \omega_k \sqrt{\left(\frac{\omega_k}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon\omega_p^2}{\varepsilon + 1}}; \\ \omega_3^2 = \omega_p^2. \end{cases} \quad (47)$$

Частота  $\omega_1 = \omega_1(\mathbf{k})$  відповідає звичайним поверхневим плазмонам, але з врахуванням просторової дисперсії (див. рис. 8). Що стосується частоти  $\omega_3 = \omega_p$ , то вона відповідає екзотичним поверхневим плазмонам (з частотою об'ємних плазмонів  $\omega_p$ ), які зумовлені двокомпонентною структурою їх електричного поля у металі.

### 5.2. Дисперсійне рівняння поверхневих плазмонів при нехтовно малій просторовій дисперсії і суттєвих статичних електромагнітних полях

Вважатимемо просторову дисперсію контактуючих середовищ нехтовно малою. У цьому випадку дисперсійні рівняння у (40) будуть мати такі розв'язки:

$$\alpha = |\mathbf{k}|, \quad \beta = -i|\mathbf{k}| \frac{(\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n})} + |\mathbf{k}| \sqrt{\frac{(\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{e}_k)}{(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n})} - \left(\frac{(\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n})}\right)^2}, \quad (48)$$

де  $\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha})$  – симетрична частина тензора діелектричної проникливості металу  $\hat{\epsilon}$ ,  $\mathbf{n} =$

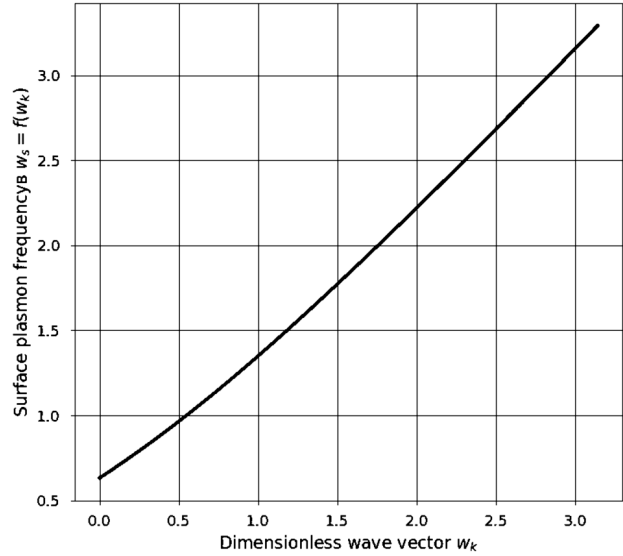


Рис. 8. Просторова дисперсія поверхневих плазмонів з двокомпонентним (у металі) електричним полем

$= (0, 0, 1)$  – вектор нормалі до межі поділу двох середовищ  $\mathbf{r} \in (r_x, r_y, 0)$ , а одиничний вектор  $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = (e_x, e_y, 0)$  визначає напрям руху поверхневих плазмонів. Цілком зрозуміло, що вираз для параметра  $\beta$  матиме фізичний зміст лише за умови, що підкорінний вираз у (48) буде позитивним. Що стосується магнітного поля поверхневих плазмонів  $\mathbf{H}$ , то тут воно буде нехтовно малим ( $\mathbf{H} \rightarrow 0$ ).

Згідно з (21) для електричного поля поверхневих плазмонів (39) повинні виконуватися граничні умови

$$\begin{cases} E_{x,y}(x, y, z = +0) = E_{x,y}(x, y, z = -0); \\ D_z(x, y, z = +0) - D_z(x, y, z = -0) = \\ = -4\pi i(\mathbf{k} \hat{\chi}^{(s)} \mathbf{E}(x, y, z = -0)), \end{cases} \quad (49)$$

де  $\hat{\chi}_s$  – поверхнева поляризуємість металу (див. (20)) за рахунок зовнішнього електростатичного поля  $\mathbf{E}_0$ .

З першого рівняння у (49) знайдемо, що у (40)  $A = B$ , а з другого – отримаємо дисперсійне рівняння для поверхневих плазмонів

$$\begin{aligned} & \varepsilon + i(\mathbf{n} \hat{\xi} \mathbf{e}_k) + \text{sign}(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n}) \times \\ & \times \sqrt{(\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{e}_k)(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n}) - (\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{n})(\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{e}_k)} = \\ & = -4\pi((\mathbf{e}_k \hat{\chi}^{(s)} \mathbf{e}_k)|\mathbf{k}| - i\beta(\mathbf{e}_k \hat{\chi}^{(s)} \mathbf{n})), \\ & (\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{n}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2 - (\mathbf{n} \omega_H)^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right), \end{aligned}$$

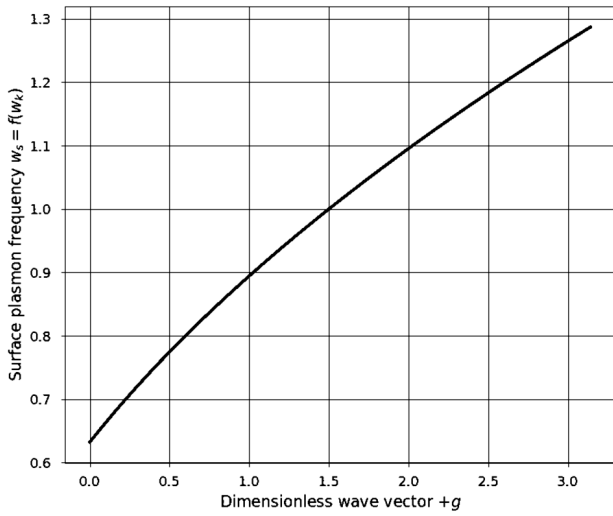


Рис. 9. Наведена електростатичним полем  $\mathbf{E}_0$  просторова дисперсія поверхневих плазмон при  $g > 0$

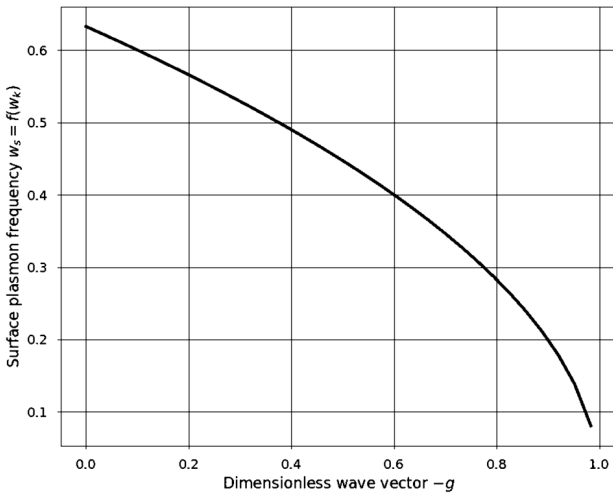


Рис. 10. Наведена електростатичним полем  $\mathbf{E}_0$  просторова дисперсія поверхневих плазмон при  $g < 0$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{e}_k) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2 - (\mathbf{e}_k \boldsymbol{\omega}_H)^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right), \\
 (\mathbf{n} \hat{\eta} \mathbf{e}_k) &= (\mathbf{e}_k \hat{\eta} \mathbf{n}) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{(\mathbf{n} \boldsymbol{\omega}_H)(\mathbf{e}_k \boldsymbol{\omega}_H)}{\omega^2 - \omega_H^2} \right), \\
 (\mathbf{n} \hat{\xi} \mathbf{e}_k) &= -i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega(\mathbf{n} \mathbf{e}_k \boldsymbol{\omega}_H)}{\omega^2 - \omega_H^2} \right), \tag{50}
 \end{aligned}$$

де  $\xi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha})$  – антисиметрична частина тензора діелектричної проникливості металу  $\hat{\epsilon}$ .

Очевидно, що дисперсійне рівняння у (50) може мати дійсні розв'язки відносно циклічної частоти  $\omega$  у тому випадку, коли у одного з контактуючих середовищ компоненти тензора діелектричної проникливості будуть негативними. У випадку поверхневих плазмонів повинна виконуватися умова  $\text{Re}(\epsilon_{\alpha\beta}) < 0$ .

Суттєвим для прикладних застосувань поверхневих плазмонів є те, що на значення їх циклічної частоти  $\omega$  мають вплив напруженості магнітостатичного  $\mathbf{H}_0$  (14) та електростатичного  $\mathbf{E}_0$  полів (див. (16) та (22)). При цьому, за рахунок поверхневих електричних зарядів, наведених електростатичним полем  $\mathbf{E}_0$ , виникає залежність частоти поверхневих плазмонів від величини їх хвильового вектора  $\mathbf{k}$  (див. (50)).

В загальному випадку права частина дисперсійного рівняння у (50) є комплексною, що призводить до затухання поверхневих плазмонів. Це явище можна пояснити перевищенням радіуса кривизни траєкторії руху електронів характеристичної глибини локалізації поверхневих плазмонів у металі  $\Delta Z_1 = \text{Re}(\frac{1}{\beta})$  за рахунок специфіки їх динаміки у статичних електромагнітних полях  $\mathbf{E}_0$  та  $\mathbf{H}_0$ . З огляду на конструкцію тензора  $\hat{\chi}^{(s)}$  зрозуміло, що подавити таке затухання поверхневих плазмонів можливо лише у тому випадку, коли на динаміку поверхневих плазмонів буде мати вплив лише одне із статичних електромагнітних полів  $\mathbf{E}_0$  або  $\mathbf{H}_0$  (див. далі).

Далі розглянемо ряд часткових випадків.

#### Магнітостатичне поле

відсутнє  $\mathbf{H}_0 = 0$ , а електростатичне поле  $\mathbf{E}_0$  перпендикулярне до поверхні металу

В цьому випадку дисперсійне рівняння (50) поверхневих плазмонів у безрозмірних змінних

$$w = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad g = \pm R_0 |\mathbf{k}|, \quad R_0 = |R_p \mathbf{E}_0| \tag{51}$$

набуває простого вигляду

$$\epsilon + \epsilon = \frac{g}{w^2} \tag{52}$$

і має такий розв'язок:

$$w_s = \sqrt{\frac{1+g}{\epsilon+1}}, \quad \omega_s = \omega_p w_s = \omega_p \sqrt{\frac{1 \pm R_0 |\mathbf{k}|}{\epsilon+1}}, \tag{53}$$

де  $\omega_s$  – циклічна частота, залежна від величини хвильового вектора  $\mathbf{k}$  поверхневих плазмонів (див. рис. 9 та рис. 10),  $R_p$  – постійна Холла, а знак величини  $g$  у (51)–(53) визначається знаком величини  $R_p(\mathbf{n} \mathbf{E}_0)$ .

Залежність циклічної частоти поверхневих плазмонів від величини хвильового вектора вказує на перехід їх динаміки з коливального на хвильовий.

### Електростатичне поле

$\mathbf{E}_0 = 0$  відсутнє, а магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  має довільну орієнтацію відносно поверхні металу

У цьому випадку права частина дисперсійного рівняння у (50) дорівнює нулю.

В трьох спеціальних геометріях задачі, а саме коли  $\omega_H$  буде колінеарним одному з векторів  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_k$ , ( $\mathbf{n} \times \mathbf{e}_k$ ), дисперсійне рівняння сильно спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \varepsilon + \text{sign}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \times \\ & \times \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right)} = 0, \text{ при } \omega_H \parallel \mathbf{n}, \\ & \varepsilon + \text{sign}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right) \times \\ & \times \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)} = 0, \text{ при } \omega_H \parallel \mathbf{e}_k, \\ & \varepsilon + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega((\mathbf{n} \times \mathbf{e}_k) \omega_H)}{\omega^2 - \omega_H^2}\right) + \\ & + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right) = 0, \text{ при } \omega_H \parallel (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_k). \end{aligned} \quad (54)$$

Розв'язки цих рівнянь, які мають фізичний зміст, можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{(\varepsilon^2 - 1)\omega_H^2 - 2\omega_p^2 + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)^2\omega_H^4 + 4\varepsilon^2\omega_p^4}}{2(\varepsilon^2 - 1)}, \\ & \text{при } \omega_H \parallel \mathbf{n}, \quad \omega_H \parallel \mathbf{e}_k, \\ \omega_{3,4} &= \pm \frac{|\omega_H|}{2} + \sqrt{\left(\frac{|\omega_H|}{2}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\varepsilon + 1}}, \\ & \text{при } ((\mathbf{n} \times \mathbf{e}_k) \cdot \omega_H) = \mp |\omega_H|. \end{aligned} \quad (55)$$

При  $\omega_H \rightarrow 0$  розв'язки (55) дисперсійних рівнянь (54) зводяться до виразу, отриманого у стандартній моделі Друде–Лоренца [1, 2]. При довільній

Dispersion surface of plasmons  $\omega_s = f(\varphi, \theta)$

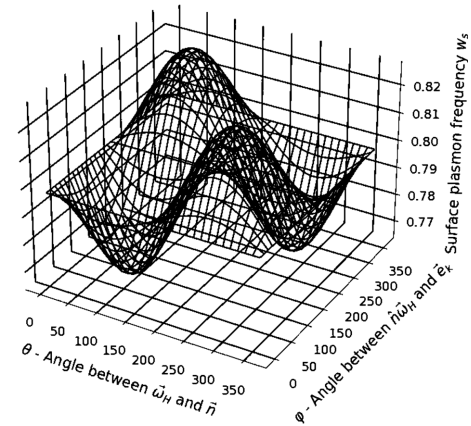


Рис. 11. Вплив орієнтації магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на дисперсію поверхневих плазмонів

орієнтації вектора магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  циклічна частота поверхневих плазмонів  $\omega_s$  визначається відображенням положення вектора  $\omega_H$  на сфері  $S^2$  на дисперсійну “поверхню” поверхневих плазмонів (див. рис. 11).

### 6. Висновки

Таким чином у роботі показано, що узагальнення моделі Друде–Лоренца дозволяє описати комплексний вплив статичних електромагнітних полів та просторової дисперсії на фізичні характеристики як об'ємних, так і поверхневих плазмонів.

Виявлено, що магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  та просторова дисперсія призводять до появи додаткових типів об'ємних плазмонів з дисперсією, залежною від взаємної орієнтації напрямку їх розповсюдження  $\mathbf{e}_k$  та магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ .

У випадку поверхневих плазмонів просторова дисперсія призводить до двокомпонентності їх електричного поля  $\mathbf{E}$  у металі, а електростатичне поле  $\mathbf{E}_0$  – до наведеної просторової дисперсії. У той самий час, орієнтація магнітного поля  $\mathbf{H}_0$  суттєво впливає на загальну дисперсію поверхневих плазмонів.

Суттєво, що у випадку поверхневих плазмонів не виникають аналоги низькочастотних об'ємних плазмонів, зумовлених магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$  та просторовою дисперсією. Це можна пояснити тим, що кривизна траєкторії руху електронів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  перевищує характеристичний розмір  $\Delta Z_1 = \text{Re}\left(\frac{1}{\beta}\right)$  локалізації поверхневих плазмонів у металі.

Залежність фізичних властивостей плазмонів від статичних електромагнітних полів можливо використати як метод керування у прикладних задачах металоплазмоніки.

1. Stefan A. Maier. *Plasmonics: Fundamentals and Applications* (Springer Science + Business Media LLC, 2007) [ISBN: 0-387-33150-6].
2. S. Enoch, N. Bonod. *Plasmonics: From Basics to Advanced Topics* (Springer, 2012) [ISBN-10: 3642280781].
3. R.S. Anwar, H. Ning, L. Mao. Recent advancements in surface plasmon polaritons-plasmonics in subwavelength structures in microwave and terahertz regimes. *Digit. Commun. Netw.* **4**, 244 (2018).
4. M.M. Fogler, A.Yu. Dobin, V.I. Perel, B.I. Shklovskii. Suppression of chaotic dynamics and localization of two-dimensional electrons by a weak magnetic field. *Phys. Rev. B* **56**, 6823 (1997).
5. N.V. Smith. Memory effects in the magnetotransport properties of the classical Drude metal. *Phys. Rev. B* **68**, 132406 (2003).
6. Eugene M. Chudnovsky. Theory of spin Hall effect: Extension of the Drude model. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 206601 (2007).
7. W.J.M. Kort-Kamp, F.S.S. Rosa, F.A. Pinheiro, C. Farina. Tuning plasmonic cloaks with an external magnetic field. *Phys. Rev. Lett.* **111** (21), 215504 (2013).
8. J. Chochol, K. Postava, M. Cada, M. Vanwolleghem, L. Halagacka, J.-F. Lampin, J. Pistora. Magneto-optical properties of InSb for terahertz applications. *AIP Advances* **6**, 115021 (2016).
9. N. Maccaferri, I. Zubritskaya, I. Razdolski, I.-A. Chioar, V. Belotelov, V. Kapaklis, P.M. Oppeneer, A. Dmitriev. Nanoscale magnetophotonics. *J. Appl. Phys.* **127**, 080903 (2020).
10. В.Ю. Малишев, І.В. Зависляк, Г.А. Мелков та ін. Мікрохвильові магнон-плазмон-поляритони в структурі феромагнітний метал-екранований діелектрик. *Укр. фіз. журн.* **65**, 932 (2020).
11. Xueqian Zhang, Quan Xu, Lingbo Xia, Yanfeng Li, Jianqiang Gu, Zhen Tian, Chunmei Ouyang, Jianguang Han, Weili Zhang. Terahertz surface plasmonic waves: Terahertz surface plasmonic waves: A review. *Advanced Photonics.* **2** (1), 014001(2020).
12. Д.В. Фатеев, В.В. Попов. Гидродинамические терагерцовые плазмоны и электронный звук в графене с пространственной дисперсией. *Физика и техника полупроводников.* **54**, 785 (2020).
13. Electronic archive. *New semiconductor materials. Characteristics and properties.* URL: [www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InSb/index.html](http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InSb/index.html).
14. Н.Б. Брандт, В.А. Кульбачинский. *Квазичастицы в физике конденсированного состояния* (Физматлит, 2005) [ISBN: 5-9221-0564-7].
15. А.И. Ансельм. *Введение в теорию полупроводников* (ИЛЛ, 1978).
16. Б.М. Аскеров. *Электронные явления переноса в полупроводниках* (Наука, 1985).
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (Наука, 1982).
18. Д.В. Сивухин. *Общий курс физики. Т. 4. Оптика* (Физматлит, 2006).

Одержано 28.12.21

N.M. Chepilko, S.A. Ponomarenko

#### THE GENERALIZED DRUDE-LORENTZ MODEL AND ITS APPLICATIONS IN METAL PLASMONICS

The Drude-Lorentz model has been generalized to the case of plasmons under nonmagnetic conductors located in the static magnetic,  $\mathbf{H}_0$ , and electric,  $\mathbf{E}_0$ , fields by taking the spatial dispersion effects into account. It is shown that the magnetostatic field  $\mathbf{H}_0$  and the spatial dispersion induce the appearance of two additional types of low-frequency bulk plasmons, and the dispersion of bulk plasmons of all types substantially depends on the relative orientation of the direction  $\mathbf{e}_k$  of their propagation and the magnetostatic field vector  $\mathbf{H}_0$ . In the case of surface plasmons, the spatial dispersion leads to a two-component structure (in the metal) of their electric field  $\mathbf{E}$ , and the external electrostatic field  $\mathbf{E}_0$  induces the spatial dispersion depending on the Hall constant  $R_p$ . At the same time, the orientation of the magnetostatic field  $\mathbf{H}_0$  has a significant effect on the total dispersion of surface plasmons.

*Keywords:* bulk plasmons, surface plasmons, spatial dispersion, magnetostatic field.