

Ю.В. ХОРОШКОВ

Вул. Світличного Івана, 4, кв. 40, Київ 03087  
(e-mail: yurihoroshkov@gmail.com)**ДЗЕРКАЛЬНА СИМЕТРІЯ ЯК АЛГЕБРА  
ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ НЕКОМУТАТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ  
ПРОСТОРУ-ЧАСУ**

УДК 539

*Аналіз геометричних і алгебраїчних властивостей дзеркальних відображень дозволив використовувати їх як операторну алгебру некомутативної геометрії. Координатами некомутативної геометрії є авто- або крос-кореляції координат дзеркально відображених просторів. Розглянуто окремих випадок шестивимірного келерова многовиду, який відображається на некомутативну геометрію з векторною алгеброю Кліффорда  $Cl_4$ . Цей випадок відображення відповідає тетракварку у складі двох пар кварк-антикварк з різних поколінь і зарядами  $\pm \frac{2}{3}q$ .*

*Ключові слова:* дзеркальна симетрія, некомутативна геометрія, алгебра Кліффорда, кореляція.

**1. Вступ**

Останні десятиліття відзначені суттєвими досягненнями в застосуванні геометричних методів у фізиці. Перш за все, це стосується створення струнної теорії простору-часу [1, 2]. У цій теорії була відкрита дзеркальна симетрія геометричних параметрів просторів Колабі–Яу [3], що істотно спростило рішення наближених рівнянь теорії в дзеркальному образі за однакової фізики результатів. Незважаючи на вражаючі результати, до теперішнього часу струнна теорія є незавершеною, оскільки невідомо який з величезного числа можливих шести або більш мірних просторів відповідає фізиці нашого простору-часу. Однак, творці теорії струн не втрачають оптимізму і сподіваються, що подальший прогрес можливий на шляху заміни звичайної геометрії новим апаратом – некомутативною геометрією. Основи некомутативної геометрії були розроблені Аланом Коном (Alain Connes) [4] для квантових полів, використовуючи операційну алгебру в описі геометрії. Однак, в цьому підході “...все ж бракує істотних моментів для опису самого початкового стану...” [5].

Метою роботи є дослідження методів, за допомогою яких дзеркальна симетрія може відобразити шестимірний комплексний простір у некомутативну геометрію і які фізичні процеси можуть цьому відповідати. Результати роботи можуть знайти за-

стосування в ядерній фізиці, квантовій механіці, квантовій електродинаміці, струнній теорії, теорії гравітації та астрофізиці.

**2. Геометрія та алгебра  
дзеркального відображення****2.1. Основи геометрії**

Математика дає приклади дзеркальної симетрії. Позитивні і негативні числа утворюють дзеркальну пару інверсної симетрії щодо нуля. Комплексні числа  $z$  та пов’язані з ними  $z^*$  утворюють дзеркальну пару щодо дійсної осі. Композицію інверсної та перестановчої симетрії демонструє дзеркальна пара  $z$  and  $1/z^*$  щодо одиничного кола. В геометрії, як історично склалося, будемо виходити з досвіду. На рис. 1 показані дзеркальні відображення (дзеркальні симетрії) площини, орієнтованої ортогональними базисними векторами  $1, 2$  системи координат. Положення плоского “дзеркала” кратні повороту на кут  $\varphi = 45^\circ$  градусів,  $\varphi = k\frac{\pi}{4}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Для  $\varphi \geq \pi$  відображення в “дзеркалі” втрачає сенс. Дискретність положення “дзеркал” і яскраво виражені симетрії вхідних та відображених базисних векторів взаємопов’язані і відображають різні властивості дзеркального відображення – інверсну та переставну симетрії. Причому відображені дзеркальні симетрії рис. 1,  $c, d$  протилежні симетриям рис. 1,  $a, b$ . Відзначимо, що для протилежних симетрій положення “дзеркал” ортогональні в фазовому просторі їх обертанья.

© Ю.В. ХОРОШКОВ, 2022

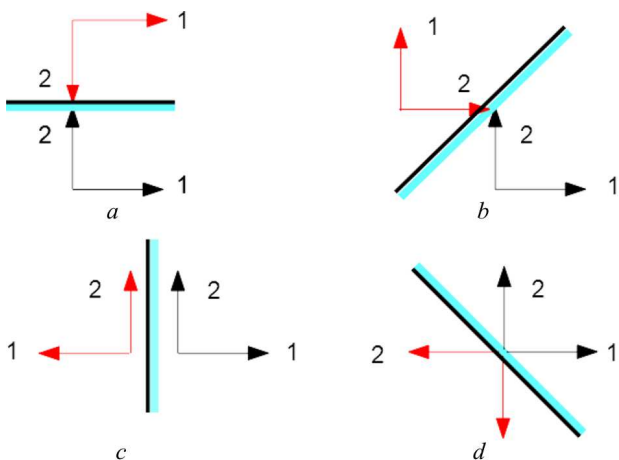


Рис. 1. Дзеркальні відображення орієнтовної площини

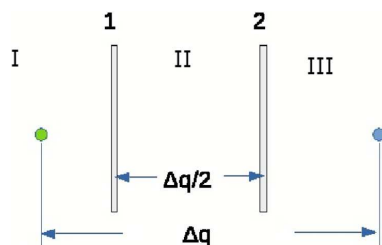


Рис. 2. “Трансляція” двома дзеркалами

Є ще одна досить незвичайна геометрична симетрія, яку умовно можна назвати “трансляцією”. Ця симетрія складається з послідовності двох плоских дзеркал, розділених “відстанню”  $\Delta q/2$  (рис. 2), і має низку особливостей. Розміри зон I–III, де діє ця симетрія, однакові і рівні  $\Delta q/2$ . Довільна точка з многовиду зони I переноситься в зону III на відстань  $\Delta q$ . Незвичайність цієї симетрії полягає у виборі розмірності фізичної величини  $\Delta q$ . Дійсно, визначимо в зоні I одиничний двовимірний вектор, який в полярних координатах має єдиний параметр  $\Delta q = \varphi$ . Вважаючи, що в зоні II  $\varphi = \alpha\pi/2, \alpha = 0, 1, 2, 3$ , отримуємо інше геометричне представлення для рисунків 1, *a–d*. Це – досить тривіальний результат, який показує, що однаковий результат досягається обертанням “дзеркала” або обертанням системи координат, що відображається (обертанням одиничного вектора у фіксованій системі координат). З однією істотною відмінністю у обертаннях – вектор повертається на кут  $\Delta\varphi$ , тоді як “дзеркала” необхідно повернути на кут  $\Delta\varphi/2$ . Ситуація ускладнюється, якщо в зоні I визначені координати  $(r, \varphi)$ , яку можна звести до по-

передньої, якщо “нормувати” 1-е дзеркало на  $1/r^2$ . Однак в цьому випадку в зоні III відображається многовид з координатами  $(1/r, \varphi)$ . Наведений приклад описує один з варіантів виникнення так званої *T*-дуальності в теорії струн, розглянутий в [6]. I, нарешті, можна уявити ситуацію узагальнених “дзеркал”, відстань між якими вимірюється в одиницях дії  $\hbar$ , де  $\hbar$  – стала Планка. У цьому випадку рис. 2 є гарною ілюстрацією співвідношення невідзначеності.

## 2.2. Властивості операторів дзеркальних відображень

Симетрії векторів на рис. 1, *a, b* можна виразити через оператори дзеркальних відображень  $s_1$  та  $s_2$ . Якщо для векторів на рис. 1 використати позначення у вигляді кет- та бра-векторів  $1 \mapsto |+\rangle$ ,  $2 \mapsto |-\rangle$ , тоді безпосередньо з рис. 1, *a, b* дія цих операторів на вектори є

$$s_1|+\rangle = +1|+\rangle, \quad s_1|-\rangle = -1|-\rangle; \tag{1}$$

$$s_2|+\rangle = |-\rangle, \quad s_2|-\rangle = |+\rangle. \tag{2}$$

Базисні вектори  $|+\rangle$  та  $|-\rangle$  є власними векторами оператора  $s_1$  з власними числами  $\lambda_{\pm} = \pm 1$ . Для нормованих ортогональних базисних векторів їх скалярний добуток визначається як  $\langle \pm | \pm \rangle = 1$ ,  $\langle \pm | \mp \rangle = 0$ . З останнього виразу можна безпосередньо отримати матричне представлення ермітових операторів дзеркальних відображень

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ці оператори формують прямокутний базис векторної алгебри Кліффорда  $Cl_2$  щодо скалярного добутку, визначеного як антикомутатор  $s_1 \bullet s_2 = \frac{1}{2}[s_1, s_2]_+ = \frac{1}{2}(s_1s_2 + s_2s_1) = 0$ , де означено зовнішній (векторний) добуток  $s_1 \wedge s_2 = \frac{1}{2}[s_1, s_2]_- = \frac{1}{2}(s_1s_2 - s_2s_1) = s_1s_2$ . У векторній алгебрі  $Cl_2$   $s_1s_2$  є бівектором або аксіальним вектором  $i$ , як оператор  $\pm s_1s_2$ , визначає  $J$ -перетворення, іншими словами, повороти на  $\pm 90^\circ$ :  $(s_1s_2)s_1 = -s_2$  – лівий поворот і  $(s_2s_1)s_1 = s_2$  – правий поворот. Цей оператор також може бути представлений як  $s_1s_2 = is_3$ , де  $s_3$  доповнює базисні вектори  $Cl_2$  до векторної алгебри  $Cl_3$ . Повна алгебра  $Cl_3$  має 8 лінійно незалежних базисних елементів, включаючи додатково  $1$  – скаляр, 3 бівектора  $b_k = is_k = \epsilon_{kij}s_i s_j$  ( $\epsilon_{kij}$  – символ Леві-Чивіті) та  $\mathbf{I} = s_1s_2s_3 = i\mathbf{1}$  –

псевдоскаляр. До  $Cl_3$  додається нова симетрія  $i\mathbf{1}$ , яка, наприклад, переводить дійсну площину в чисто уявну. Комбінації з новими симетріями породжують новий вид симетрії – проєктори  $\mathbf{P}_k$ . Сформуємо оператор  $\mathbf{P}_{k\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{s}_k)$ , який має властивості  $(\mathbf{P}_{k\pm})^2 = \mathbf{P}_{k\pm}$  та  $\mathbf{P}_{k+}\mathbf{P}_{k-} = \mathbf{0}$ . Результат його дії, наприклад, на базисні вектори має вигляд  $\mathbf{P}_{1+}(|+\rangle + |-\rangle) = |+\rangle$ . Іншими словами, проєктор  $\mathbf{P}$  в “задзеркаллі” виділяє (видаляє) з площини один вимір. Слід зазначити, що композиції скаляра  $\mathbf{1}$  з операторами дзеркальних відображень в алгебрі  $Cl_2$  дозволили визначити всі три відомі системи комплексних чисел в залежності від властивостей квадрата уявної одиниці  $\epsilon^2 = 0, \pm 1$  [7]. З іншого боку, геометричні дзеркальні симетрії на рис. 1 вказують на існування дзеркальних симетрій, згенерованих операторами:  $\mathbf{s}_i$  – звичайне “дзеркало”,  $(-\mathbf{s}_i)$  – “антидзеркало”. Тут можна органічно дописати  $\mathbf{1} \mapsto \mathbf{s}_0$  – “тотожне дзеркало” та  $i\mathbf{1}$  – “уявне дзеркало”, а також бівектори  $\mathbf{b}_k$  як елементи  $J$ -перетворення. Формалізація дзеркальних відображень векторною алгеброю Кліффорда дозволило істотно розширити уявлення про дзеркальну симетрію. Тому доцільно вважати алгебру  $Cl_3$  загальним формулюванням дзеркальної симетрії і розглядати властивості та операції в ній як наслідок розширеного закону дзеркальної симетрії.

Позначення операторів як  $-\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2$  не є випадковим, оскільки для матричного представлення діагонального оператора  $\mathbf{s}_1$  визначено спектральне зображення

$$F_1(\psi) = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{s}_1 \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де  $\mathbf{V} \begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix}$  – відповідна матриця обертання і  $\mathbf{V} \begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ . Для дискретного кута повороту  $\psi = \alpha\pi/2, \alpha = 0, 1, 2, 3$  “спектр”  $\mathbf{s}_1$  має вигляд

$$F_1 \Rightarrow \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, -\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2\}, \quad (5)$$

звідки випливає, що дискретність кута повороту  $\Delta\psi = \pi/2$  як елемент  $J$ -перетворення пов’язаний з умовою збереження інверсної та переставної симетрій.

Дзеркальна симетрія передбачає наявність відхідного простору і відбитого простору – “задзеркалля”. Початковий простір будується на власних векторах  $\varphi_{1,2}^k$  операторів дзеркальних відображень

$\mathbf{s}_k$ , які, в свою чергу, належать тривимірному келерову многовиду (Kähler manifold) з компонентами  $(\xi, \eta)$ , де  $\xi = x + iz, \eta = y - iz$  [7]. Введемо багатовимірний векторний простір  $\mathcal{H}(x^0, x^1, \dots)$  і вектор в ньому  $|R\rangle$ , який проєкується на площині власних векторів операторів  $\mathbf{s}_k$

$$|R\rangle \Rightarrow |r^k\rangle = r_1^k |\varphi_1^k\rangle + r_2^k |\varphi_2^k\rangle, \quad (6)$$

де  $|r^k\rangle - k$  – представлення вектора  $|R\rangle$ , і  $r_n^k = \langle \varphi_n^k | R \rangle$  – коваріантні координати  $|R\rangle$  в базисі  $|\varphi_n^k\rangle$  власних векторів операторів  $\mathbf{s}_k$ . Ермітові оператори  $\mathbf{s}_k$  дають для комплексних координат дійсні величини в конструкціях виду  $G_k^k = \langle r^k | \mathbf{s}_k | r^k \rangle = |r_1^k|^2 + |r_2^k|^2$ . Останній вираз являє собою скалярний добуток вектора  $|r^k\rangle$  і дзеркально відбитого оператором  $\mathbf{s}_k$  вектора спряженого простору  $\langle r^k |_{\text{ref}} = \langle r^k | \mathbf{s}_r$ . Цей вираз відповідає взаємній кореляції (крос-кореляції) векторів при дзеркальному відображенні.

### 3. Спектральне подання операторів дзеркального відображення і квантування

#### 3.1. Оператори спектрального представлення

Якщо накласти умову збереження інверсної та переставної симетрії для дзеркальних відображень, то спектральне представлення оператора дзеркального відображення  $\mathbf{s}_1$  (5) необхідно вважати дискретним. При цьому спектральні компоненти  $\mathbf{s}_{1,2}$  та  $-\mathbf{s}_{1,2}$ , як позитивні та негативні “частоти спектра”, повинні певним способом бути розділені. Рисунок 1 підказує, що така можливість є, якщо кожна пара ортогональних базисних векторів  $(\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2})$  породжуватиме (гіпер)площину і служитиме базисом нового векторного простору. Іншими словами,  $(\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2}) \Rightarrow \mathbf{e}_{1,2}$ . Дискретність “спектра” можна ввести в такий спосіб. У виразі (4) для “спектра” діагонального оператора  $\mathbf{s}_1$  матриці обертання можна виразити через кватерніон і привести його до вигляду:

$$F_1\{\mathbf{s}_1\} = \exp(-i\mathbf{s}_3\psi)\mathbf{s}_1 = \mathcal{F}_3(\psi)\mathbf{s}_1, \quad (7)$$

де бівектор  $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = i\mathbf{s}_3$  визначається як кватерніонна уявна одиниця, а  $\mathcal{F}_3(\psi)$  позначимо як оператор спектрального перетворення. Подамо оператор спектрального перетворення  $\mathcal{F}$  у вигляді інтеграла, який виконує необхідну дискретизацію і

відображає дію операторів  $\pm \mathbf{s}$  в різних просторах

$$\mathcal{F}_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\psi \Theta_\alpha(\psi) \otimes \exp(-i\mathbf{s}_3\psi), \quad (8)$$

де  $\Theta_\alpha(\psi)$  має структуру матриць  $\mathbf{s}_\alpha$   $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , елементами яких є  $\delta(\psi)$  дельта-функції Дірака,  $\otimes$  позначає добуток Кронекера. Використовуючи в ролі матриці оператор,  $\mathbf{s}_0$  отримуємо одне з можливих дискретних представлень  $\Theta(\psi)$  у вигляді

$$\Theta_0(\psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(\psi - n2\pi) & 0 \\ 0 & \delta(\psi - \pi - n2\pi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(\psi - \frac{\pi}{2} - n2\pi) & 0 \\ 0 & \delta(\psi - \frac{3\pi}{2} - n2\pi) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де врахована періодичність кватерніонної змінної і  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для (8) існує нормування у вигляді

$$N\{\mathbf{s}_0\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\psi \Theta_0(\psi) \otimes \mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_0. \quad (10)$$

З виразу (8) отримаємо

$$\mathcal{F}_3(n) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{s}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \right] \otimes \exp(-i\mathbf{s}_3 n 2\pi). \quad (11)$$

У цьому виразі  $\exp(-i\mathbf{s}_3 n 2\pi) \equiv \mathbf{s}_0$  і не впливає на вигляд матриць, але показує, що по координаті бівектора  $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$  формується дискретний ряд з операторів  $\mathcal{F}$ . Дія оператора  $\mathcal{F}_3$  на  $\mathbf{s}_1$ , визначається як  $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_1$  та приводить до базисних векторів:  $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ , а також  $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ , де нові базисні вектори

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{s}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{s}_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Вирази (9), (11) показують приклад геометричної дискретизації по осі бівектора.

Спектральне подання (8)  $\Theta_\alpha(\psi)$  з матрицею  $\mathbf{s}_0$  є дискретним відображенням математичного визначення спектра діагональних матриць і геометричного тлумачення поняття ортогональності операторів  $\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2}$  дзеркальної симетрії. В інтегралі (8) матрицю  $\Theta_\alpha(\psi)$  можна узагальнити на всі матриці базисних векторів  $\mathbf{s}_\alpha$  алгебри  $\text{Cl}_3$ , але спектральне подання реалізується тільки для парних

значень  $\alpha = 0, 2$ . Це дозволяє отримати різні спектральні подання матриць  $4 \times 4$  та, в тому числі, які знайшли застосування в квантовій механіці (представлення Майорани, Дірака). Дійсно, для  $\Theta_2(\psi)$  наведені вище операції дають

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_1 \\ -\mathbf{s}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_2 \\ -\mathbf{s}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де  $\gamma_{1,2}$  – матриці Дірака в індексації операторів дзеркальної симетрії. Інтеграл нормування дає новий вектор:

$$N_2\{\mathbf{s}_0\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\psi \Theta_2(\psi) \otimes \mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_4. \quad (14)$$

Матриці  $\gamma_{1,2}$  є бівекторами, оскільки  $(\gamma_{1,2})^2 = -\mathbf{e}_0$  і виражаються через новий вектор  $\mathbf{e}_4$  як  $\gamma_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4$  та  $\gamma_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4$ . Кватерніон  $Q_3 = \exp(-i\mathbf{s}_3\psi)$  визначає обертання в площині базисних векторів  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$ . В [7] показано, що кватерніони  $Q_1 = \exp(-i\mathbf{s}_1\psi)$  та  $Q_2 = \exp(-i\mathbf{s}_2\psi)$  визначають обертання в площинах  $\{\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  та  $\{\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_1\}$  відповідно. Використання цих обертань в (8) дозволяє отримати додаткові спектральні подання операторів дзеркальної симетрії  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ ,  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathbf{s}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$  та  $\mathcal{F}_2 \otimes \mathbf{s}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)$ ,  $\mathcal{F}_2 \otimes \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)$ . Оператори  $\mathbf{e}_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ ) формують базисні вектори алгебри  $\text{Cl}_4$  в некомутативній геометрії.

### 3.2. Спектральне подання в фізичних змінних

Інтеграл (8), який реалізує дискретне спектральне подання операторів дзеркальної симетрії, базується на математичних і геометричних властивостях цих операторів. В результаті застосування спектрального подання з'явилася додаткова геометрична дискретизація по осях бівекторів, пов'язана з періодичністю процесів обертання. Ці дискретні властивості для некомутативної геометрії вимагають аналізу можливих фізичних процесів, що забезпечують їх появу. Фізичні змінні з'являються при факторизації фази  $\psi = \omega t = 2\pi t/T$ , де  $T$  – період обертання, або в інших позначеннях  $\psi = 2\pi Et/h = 2\pi S/h$ , де  $E$  – енергія процесу обертання,  $2\pi E/h = \omega$  та  $S$  – має сенс дії, а нормуюча стала  $h$  покладається рівною сталій Планка. Змінні інтегрування в (8) в цих випадках

замінюються на  $t$  або  $S$  параметри  $1/T$  та  $1/h$  переходять множниками  $(1/T)^{-1}$  або  $(1/h)^{-1}$  в оператори  $\mathbf{e}_\alpha$  відповідно. Якщо провести аналогію з квантово-механічними операторами координати  $\mathbf{q}$  або імпульсу  $\mathbf{p}$ , то ці два види факторизації приводять до спектральних представлень, які можна назвати “частотним” або “квантовим” представленнями відповідно.

Є умови, за яких ці два подання є еквівалентними. Припустимо, що сам процес обертання є фізичним процесом, коли експоненціальний множник в (8) замінюється на оператор  $\mathbf{R} = E \exp(-i\mathbf{s}_k \omega t)$ , де  $E$  – енергія процесу  $\mathbf{R}$ . У цьому процесі параметри  $E, \omega$  змінюються в деяких межах. Умова незалежності спектрального представлення від параметрів процесу  $\mathbf{R}$  формулюється з (8) зокрема так:

$$(E_1 T_1 - E_2 T_2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 0. \quad (15)$$

З цього виразу випливає, що  $E_1 T_1 = E_2 T_2 = \text{const}$ . Якщо покласти цю константу рівною сталій Планка  $h$ , то з цього випливає  $E = h\nu$ , і  $\mathbf{R}$  є неklasичним процесом обертання. В ролі базового інтеграла для спектрального представлення в фізичних змінних будемо приймати вираз з  $\omega t$

$$\mathcal{F}_k = 2\pi \int_0^\infty dt \Theta_{0,2}(t) \otimes \exp(-i\mathbf{s}_k \omega t). \quad (16)$$

Слід зазначити, що при факторизації фази  $\psi = 2\pi S/h$  і інтегруванні по змінній  $S$ , аргументи дельта-функцій набувають вигляду  $S - mh/4 - nh$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ . Цей вираз показує, що  $\mathbf{s}_k$  і  $-\mathbf{s}_k$  в термінах дії відрізняються на  $\frac{1}{2}$  кванта дії  $h$ . Це підтверджує можливість фізичної реалізації рис. 2 для  $\Delta q/2 = h/2$ .

#### 4. Кореляційне подання дзеркальних відображень в некомутовативній геометрії

Введемо оператори автокорреляції  $\mathbf{G}^k = |r^k\rangle\langle r^k|$ , яка для нормованих векторів  $|r^k\rangle$  має властивості проектора  $(\mathbf{G}^k)^2 = \mathbf{G}^k$ . Визначимо також оператори  $\mathbf{K}_{rl\dots}^k = \mathbf{G}^k \mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots$ , які відповідають взаємній кореляції (крос-кореляції) вектора  $|r^k\rangle$  і дзеркально відбитого операторами  $\mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots$  вектора спряженого простору  $\langle r^k |_{\text{ref}} = \langle r^k | \mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots$ . Оператори  $\mathbf{K}_{rl\dots}^k$  мають властивості:

$$\mathbf{K}_{rl\dots}^k |r^k\rangle = p_{rl\dots}^k |r^k\rangle, \quad p_{rl\dots}^k = \langle r^k | \mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots |r^k\rangle, \quad (17)$$

де  $p_{rl\dots}^k$  – власні числа крос-кореляційного оператора  $\mathbf{K}_{rl\dots}^k$ . Ці числа є скалярними добутками векторів вхідного простору і дзеркально відображеного. Це гарантує існування операторного виразу  $p_{rl\dots}^k \mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots$  та подання власних чисел оператора крос-кореляції з точністю до сталих множників  $\lambda_{rl\dots}$ , які є власними числами операторів  $\mathbf{s}_r \mathbf{s}_l \dots$ . Саме ця обставина дозволяє перейти від операторного представлення  $\mathbf{s}_r$  до чисто векторного тлумачення  $\mathbf{s}_r$  як базисних векторів некомутовативної геометрії. З означення оператора  $\mathbf{G}^k$  і виразу (6) маємо

$$\mathbf{G}^k = |r_1^k|^2 \mathbf{p}_{11}^k + |r_2^k|^2 \mathbf{p}_{22}^k + r_1^k r_2^{k*} \mathbf{p}_{12}^k + r_2^k r_1^{k*} \mathbf{p}_{21}^k, \quad (18)$$

де  $\mathbf{p}_{nm}^k = |\varphi_n^k\rangle\langle\varphi_m^{k*}|$ , символ  $(*)$  означає комплексне спряження. Оператори  $\mathbf{p}_{nm}^k$  мають властивість:  $(\mathbf{p}_{nm}^k)^2 = \mathbf{p}_{nm}^k \delta_{nm}$ ,  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера. Іншими словами, оператори  $\mathbf{p}_{nn}^k$  визначають проектори, а  $(\mathbf{p}_{nm}^k)^2 = 0$ ,  $(n \neq m)$ . Однак, комутатор операторів  $\mathbf{p}_{12}^k$  та  $\mathbf{p}_{21}^k$  дорівнює  $[\mathbf{p}_{12}^k, \mathbf{p}_{21}^k] = \mathbf{p}_{11}^k - \mathbf{p}_{22}^k$ . Якщо визначити проектори  $\mathbf{p}_{nn}^k$  через оператори дзеркальної симетрії  $\mathbf{s}_k$  у стандартному вигляді

$$\mathbf{p}_{11}^k = \mathbf{p}_+^k = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{s}_k), \quad (19)$$

$$\mathbf{p}_{22}^k = \mathbf{p}_-^k = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{s}_k), \quad (20)$$

тоді  $[\mathbf{p}_{12}^k, \mathbf{p}_{21}^k] = \mathbf{s}_k$ . В алгебрі  $\text{Cl}_3$  оператори  $\mathbf{p}_{nm}^k$  можна представити двома парами

$$\mathbf{p}_{12}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + i\mathbf{s}_3), \quad \mathbf{p}_{21}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 - i\mathbf{s}_3); \quad (21)$$

$$\mathbf{p}_{12}^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_2 + i\mathbf{s}_3), \quad \mathbf{p}_{21}^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_2 - i\mathbf{s}_3). \quad (22)$$

Перша пара породжує представлення  $k = 2$  для оператора  $-\mathbf{s}_2$ , а друга – представлення  $k = 1$  для оператора  $\mathbf{s}_1$ . Аналіз показує, що загальний вираз для подання  $\mathbf{G}^k$  в  $k$ -базисі має вигляд

$$\mathbf{G}^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{klr} [ |r_1^k|^2 (\mathbf{1} + \mathbf{s}_k) + |r_2^k|^2 (\mathbf{1} - \mathbf{s}_k) + r_1^k r_2^{k*} (\mathbf{s}_l + i\mathbf{s}_r) + r_2^k r_1^{k*} (\mathbf{s}_l - i\mathbf{s}_r) ], \quad (23)$$

де  $\varepsilon_{klr}$  – символ Леві-Чівіта для перестановок (123), (231), (312). З огляду на це, представлення  $\mathbf{G}^1$  в (23) має вигляд

$$\mathbf{G}^1 = g_0^1 \mathbf{s}_0 + g_1^1 \mathbf{s}_1 + g_2^1 \mathbf{s}_2 + g_3^1 \mathbf{s}_3. \quad (24)$$

Коефіцієнти розкладу  $\mathbf{G}^1$  визначаються так:

$$g_0^1 = \frac{1}{2}(|r_1^k|^2 + |r_2^k|^2), \quad g_1^1 = \frac{1}{2}(|r_1^k|^2 - |r_2^k|^2), \quad (25)$$

$$g_2^1 = \frac{1}{2}(r_1^k r_2^{k*} + r_2^k r_1^{k*}), \quad g_3^1 = \frac{i}{2}(r_1^k r_2^{k*} - r_2^k r_1^{k*}), \quad (26)$$

де  $i$  – уявна одиниця. Коефіцієнти розкладу  $g_\alpha^1$  – дійсні числа, і  $\mathbf{G}^1$  має вигляд

$$\mathbf{G}^1 = |r^1\rangle\langle r^1| = \begin{pmatrix} |r_1|^2 & r_1 r_2^* \\ r_2 r_1^* & |r_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В оптиці  $\mathbf{G}^1$  називають матрицею когерентності для квазімонохроматичного випромінювання, а параметри  $2g_\alpha$  – параметрами Стокса, які описують поляризацію електромагнітних хвиль. Цей розклад є повним, оскільки чотири компоненти  $\mathbf{G}$  представлені чотирма їх лінійними комбінаціями з чотирьох лінійно незалежних матриць  $\mathbf{s}_\alpha$ . Якщо звернутися до виразу (17) для оператора крос-кореляції  $\mathbf{K}_\alpha^k$  і підсумувати за  $\alpha$  конструкцію вигляду  $p_\alpha^k \mathbf{s}_\alpha$ , де  $p_\alpha = 2g_\alpha$ , то з точністю до константи 2 вона є представленням автокореляційного оператора  $\mathbf{G}^1$  вихідного простору. Таким чином, вирази (23), (24) відображають кореляційні властивості дзеркально відбитого двовимірного векторного простору з комплексними координатами на чотиривимірний базис векторного простору з некомутативною геометрією. Цей 4-базис можна розглядати як гіперболічні гіперкомплексні числа і ввести спряження вигляду  $\bar{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{s}_0$  та  $\bar{\mathbf{s}}_k = -\mathbf{s}_k$  (спряження за Кліффордом). За аналогією з комплексними числами  $z_1 z_2 = (\bar{z}_1 \bullet z_2) + i[\bar{z}_1 \times z_2]$  для цього 4-базису метричний тензор  $\mu_{\alpha\beta}$  визначається як скалярний добуток вигляду

$$\mu_{\alpha\beta} = (\bar{\mathbf{s}}_\alpha \bullet \mathbf{s}_\beta) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \mathbf{s}_\beta + \bar{\mathbf{s}}_\beta \mathbf{s}_\alpha), \quad (28)$$

де  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ . Тензор  $\mu_{\alpha\beta}$  – діагональний з сигнатурою  $\text{diag}(\mu_{\alpha\beta}) = (1, -1, -1, -1)$ , характерною для ріманового простору (простору Маньківського). Зовнішній добуток також визначається як  $(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \wedge \mathbf{s}_\beta) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \mathbf{s}_\beta - \bar{\mathbf{s}}_\beta \mathbf{s}_\alpha)$ . Останні формули для 4-базису справедливі і для 4-векторів.

## 5. Спектральні перетворення в процесі дзеркального відображення

### 5.1. Дотичні простори при дзеркальному відображенні

Дослідимо дотичний простір, точніше дотичний підпростір, для вектора вихідного простору  $|r^k\rangle$  і

його компонент в процесі дзеркального відображення. Компоненти вектора  $|r^k\rangle$  виділяються проєкторами  $\mathbf{P}_{k\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{s}_k)$  за формулами:  $\{|r^k\rangle\}_+ = \mathbf{P}_{k+}|r^k\rangle = r_1^k|+\rangle_k$  та  $\{|r^k\rangle\}_- = \mathbf{P}_{k-}|r^k\rangle = r_2^k|-\rangle_k$ . Базисні вектори дотичного простору формуються на основі дії на компоненти  $\{|r^k\rangle\}_\pm$  коваріантного 4-градієнта з диференціюванням по координатах  $x^\alpha$  в базисі операторів  $\mathbf{s}_\alpha$ . Визначимо 4-градієнт як  $\nabla = \partial_\alpha \mathbf{s}_\alpha$  та  $\bar{\nabla} = \partial_0 \mathbf{s}_0 - \nabla$ , де  $\nabla = \partial_k \mathbf{s}_k$  – векторна частина 4-градієнта<sup>1</sup>. Оскільки  $\mathbf{P}_{k\pm} = (\mathbf{P}_{k\pm})^2$ , при дії 4-градієнта на компоненти  $\{|r^k\rangle\}_\pm$  формується оператор дотичного підпростору  $\mathbf{T}_k$  за правилом  $\mathbf{T}_{k\pm} = \nabla \mathbf{P}_{k\pm}$ . Тоді процес отримання дотичного підпростору для компонент вектора  $|r^k\rangle$  можна описати виразом  $\mathbf{T}_{k\pm}\{|r^k\rangle\}_\pm$ . Покладемо, наприклад,  $k = 1$ , і в результаті для  $\mathbf{T}_{k+}\{|r^k\rangle\}_+$  маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1+}r_1^1|+\rangle_1 &= (\partial_0 + \partial_1)r_1^1|+\rangle_1 + \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_3)r_1^1\mathbf{s}_2|+\rangle_1 - \\ &- \frac{1}{2}i(\partial_2 + i\partial_3)r_1^1\mathbf{s}_3|+\rangle_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Для  $\mathbf{T}_{k-}\{|r^k\rangle\}_-$  вираз (29) відрізняється тільки знаками. Можна отримати розв'язок рівняння  $\mathbf{T}_{1+}r_1^1|+\rangle_1 = 0$  для  $r_1^1$  у факторизованому вигляді  $r_1^1 = r_1^1(x^2, x^3)w_1^1(x^0, x^1)$ . Для рівняння  $\mathbf{T}_{1-}r_2^1|-\rangle_1 = 0$  розв'язок відповідає комплексно спряженому виразу  $r_2^{1*} = r_2^{1*}(x^2, x^3)w_2^{1*}(x^0, x^1)$ . Похідні  $\partial_2 \pm i\partial_3 = 0$  визначають умову Коші–Рімана для комплексних функцій  $r_1^1(x^2, x^3)$  та  $r_2^{1*}(x^2, x^3)$ , а функції  $w_1^1, w_2^{1*}$  визначають хвилі в фізичних координатах простору-часу  $x^0 = ct$ ,  $x^k = (x, y, z)$ , які поширюються в протилежних напрямках вздовж осі координат  $x^1$ . Дійсно, функції  $w_1^1, w_2^{1*}$  можна уявити через їх фур'є-образи  $w_1^1(t, x^1) = \mathcal{F}\{\omega_1 t - k_1 x^1\}$  та  $w_2^{1*}(t, x^1) = \mathcal{F}^*\{\omega_2 t + k_2 x^1\}$ . Тоді рівняння для цих функцій виглядають таким чином:

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_1)\mathcal{F}\{\omega_1 t - k_1 x^1\} &= (\omega_1/c - k_1) = 0, \\ (\partial_0 - \partial_1)\mathcal{F}^*\{\omega_2 t + k_2 x^1\} &= (\omega_2/c - k_2) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

У цих виразах потрібно, щоб існували відмінні від нуля похідні функцій  $w_1, w_2^*$ . Виходячи з цих виразів, функції  $w_1, w_2^*$  описують хвильові процеси  $w_1^1(x^0, x^1) = w_1^1(\omega_1(t - x^1/c))$ ,  $w_2^{1*}(x^0, x^1) = w_2^{1*}(\omega_2(t + x^1/c))$ . Неважко помітити, що розклад за власними векторами інших операторів має

<sup>1</sup> Тут по однакових індексах робиться підсумовування

структуру розв'язків, які аналогічні наведеним вище. Для цього, в отриманих результатах в компонентах вектора лише слід змінити номери координат за допомогою циклічної перестановки. Оскільки структура диференціального оператора в (29) відповідає алгебрі  $Cl_2$ , маємо 3 модифікації алгебр  $Cl_2$  для опису дотичних підпросторів “задзеркалля” в залежності від напрямку поширення хвильового процесу. Цей напрямок визначається вибором базису власних функцій операторів  $\mathbf{s}_k$ , в якому представлений вектор вихідного простору  $|r^k\rangle$ .

Слід зазначити, що отримані результати описують досить широкий клас хвильових процесів, зокрема, рух частинки зі швидкістю  $c$  при відповідному вигляді функції  $w$ . В останньому випадку фізичний зміст змінної  $\omega$  істотно змінюється.

### 5.2. Формування базису некомутативної геометрії в “задзеркаллі-2”

Дотичний простір в “задзеркаллі-1”, побудований для нашого чотиривимірного простору-часу, показав існування трьох хвильових процесів. Ці процеси поширюються у трьох ортогональних напрямках, які описуються некомутативною геометрією з алгеброю  $Cl_2$ . Для аналізу виберемо версію дотичного підпростору для вектора  $|r^k\rangle$  у вигляді плоских хвиль і  $\langle r^k|r^k\rangle = E$

$$|r^k\rangle = \sqrt{\frac{E}{2}} \exp(ikx^k/2) [\exp(-i\omega t/2)|+\rangle_k + \exp(i\omega t/2)|-\rangle_k]. \quad (31)$$

Цей вираз описує вектор з частотою обертання  $\omega/2$  в різних базисах власних векторів операторів  $\mathbf{s}_k$ . З виразу (23) випливає, що для (31) автокореляційні оператори  $\mathbf{G}_k$  в “задзеркаллі-1” мають вигляд

$$\mathbf{G}_{ik} = \frac{1}{2} E (\mathbf{1} + \exp(-is_i\omega t)\mathbf{s}_k), \quad (32)$$

де  $(ik) = (12), (23), (31)$ ,  $\mathbf{1} = \mathbf{s}_0$ . Замінюючи експонентний множник в (16) на  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{23} + \mathbf{G}_{31}$  для  $\alpha = 0$ , одержуємо

$$\mathcal{F}_0\{\mathbf{G}\} = \frac{ET}{2} (3\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad (33)$$

де виключена періодична залежність за координатами бівекторів  $is_k$ , оскільки вона не змінює ви-

гляд сформованих базисних векторів

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_\alpha & 0 \\ 0 & -\mathbf{s}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (34)$$

За цими результатами можна уявити модель простору в “задзеркаллі-2” у такий спосіб. Є дискретний  $S$ -простір дії у вигляді тривимірного простору  $\{n_1, n_2, n_3\}$ , складеного з кубічних комірок з ребрами розміром  $ET$ , які є координатними осями бівекторів  $is_k$ . Вузли ґратки описуються некомутативною геометрією з базисними векторами (34). Для  $\Theta_2$  в (16) можна отримати систему базисних векторів  $\mathcal{F}_2\{\mathbf{G}\}$  у вигляді

$$\mathcal{F}_2\{\mathbf{G}\} = \frac{ET}{2} (3\mathbf{e}_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad (35)$$

де  $\gamma_k$  – матриці Дірака в індексації операторів дзеркальної симетрії:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_k \\ -\mathbf{s}_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Для неklasичного процесу обертання покладемо  $ET = h$  у виразах (33) та (35).

## 6. Підвищення розмірності некомутативної геометрії

### 6.1. Перехід до 4-вимірної або 5-вимірної некомутативної геометрії

Об'єднання операторів “дзеркал”  $\mathbf{s}_k$  та “антидзеркал”  $-\mathbf{s}_k$  в один оператор дзеркальних відображень  $\mathbf{e}_k$  підвищує розмірність початкового простору дзеркальних відображень. Введемо два комплексних простора  $\mathcal{H}_a$  и  $\mathcal{H}_b$ , які не перетинаються, але мають спільну точку 0. В основному представленні  $|r^k\rangle (k = 1)$  проєкції векторів цих просторів можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} |r_a\rangle &= a(f_1|+\rangle + f_2|-\rangle) \\ |r_b\rangle &= b(f_3|+\rangle + f_4|-\rangle), \end{aligned} \quad (37)$$

де  $a, b$  – сталі множники. Об'єднаємо ці простори  $\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$  і побудуємо кореляційний оператор  $\mathbf{G}$ , який в цьому випадку представлений матрицею  $4 \times 4$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} |a|^2 \mathbf{G}_{11} & ab^* \mathbf{G}_{12} \\ ba^* \mathbf{G}_{21} & |b|^2 \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

де  $\mathbf{G}_{kt}$  представлені матрицями  $2 \times 2$ . Діагональні оператори  $\mathbf{G}_{11}, \mathbf{G}_{22}$  описують кореляції компонент векторів в кожному з просторів  $\mathcal{H}_a$  та  $\mathcal{H}_b$ , а  $\mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{21}$  – кореляцію (взаємодію) цих компонент між  $\mathcal{H}_a$  та  $\mathcal{H}_b$ . Отже, не тільки підвищується розмірність початкового простору дзеркальних відображень. Для того, щоб перейти до некомутативної геометрії, з виразу (38) випливає, що базисні вектори (32) мають бути доповнені операторами симетрій з недіагональними елементами. Використовуючи вектор  $\mathbf{e}_4$  з (35), можна отримати розширення некомутативної геометрії  $Cl_3$  до алгебри  $Cl_4$ . Ці алгебри формують  $S$ -простір дії в “задзеркаллі-2”. Для неklasичного  $S$ -простору виконуються комутаційні співвідношення, які, у випадку алгебри  $Cl_3$ , для бівекторів і 3-вектора мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_k \wedge \mathbf{e}'_l &= \frac{1}{2}[\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l] = h^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \\ \mathbf{e}'_r \bullet (\mathbf{e}'_k \wedge \mathbf{e}'_l) &= h^3 \epsilon_{klr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \end{aligned} \quad (39)$$

де  $\epsilon_{klr}$  – символ Леві-Чівіта, і  $\mathbf{e}'_k = h\mathbf{e}_k$ .

### 6.2. Перехід до 6-вимірному простору дзеркальних відображень

Розглянемо окремо наступний неklasичний випадок. Зв'яжемо компоненти векторів в просторах  $\mathcal{H}_a$  та  $\mathcal{H}_b$   $J$ -перетворенням:  $f_3 = f_2$ ,  $f_4 = -f_1$ , і покладемо  $a = \sqrt{\frac{2q}{3h}}$ ,  $b = \sqrt{-\frac{2q}{3h}} = ia$ , де  $\pm q$  – дійсна стала, яка асоціюється з елементарним зарядом. Як результат  $\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$ , отримаємо шестивимірний келеровий многовид вихідного простору дзеркальних відображень для “задзеркаллі-2”. В цьому випадку кореляційні блоки в (38) мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{11} &= \alpha \begin{pmatrix} |f_1|^2 & f_1 f_2^* \\ f_2 f_1^* & |f_2|^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_{12} &= \beta^* \begin{pmatrix} f_1 f_2^* & -|f_1|^2 \\ |f_2|^2 & -f_2 f_1^* \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_{21} &= \beta \begin{pmatrix} f_2 f_1^* & |f_2|^2 \\ -|f_1|^2 & -f_1 f_2^* \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_{22} &= \alpha \begin{pmatrix} |f_2|^2 & -f_2 f_1^* \\ -f_1 f_2^* & |f_1|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (40)$$

де  $\alpha = \frac{2q}{3h}$ ,  $\beta = i\frac{2q}{3h}$ .

Кореляцію  $\mathbf{G}$  шестивимірному простору в “задзеркаллі-2” можна відобразити на некомутативну

геометрію за допомогою крос-кореляції  $\mathbf{K}$  “задзеркаллі-2” та “задзеркаллі-3”, що виконується за допомогою базисних векторів  $\mathbf{e}_\alpha$  та бівекторів  $\gamma$  (34), (35) з умовами комутаційних співвідношень (39). Як наслідок, в “задзеркаллі-3” можна записати 6 векторів некомутативної геометрії, які виглядають таким чином:

$$\Pi = p_0 \mathbf{e}_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_4 \mathbf{e}_4 + p_{14} i h \gamma_1 + p_{24} i h \gamma_2, \quad (41)$$

де значення  $p_\alpha$  визначаються за формулою (17) та є рівними  $p_0 = 2q(|f_1|^2 + |f_2|^2)$ ;  $p_1 = \frac{2}{3}q(|f_1|^2 - |f_2|^2)$ ;  $p_2 = \frac{2}{3}q(f_1 f_2^* + f_2 f_1^*)$ ;  $p_4 = \frac{2}{3}q(f_1 f_2^* - f_2 f_1^*)$ ;  $p_{14} = \frac{2}{3}q(f_1 f_2^* + f_2 f_1^*)$ ;  $p_{24} = \frac{2}{3}(-q)(|f_1|^2 - |f_2|^2)$ . Усі компоненти  $p_\alpha$  дійсні. Координата  $p_3 = 0$ . Ця координата відповідає сумі протилежно орієнтованих аксіальних векторів, які можна пов'язати з магнітними моментами.

### 7. Висновки

У статті не вирішуються завдання і проблеми теорії струн або некомутативної геометрії, але робиться спроба знайти спільне, де вони можуть стикатися. Для цього була вибрана чисто фізична методика “від досвіду” на основі фундаментальної симетрії – дзеркальної симетрії. Це дозволило ввести в теорію “початковий стан”, який може набути реального фізичного змісту.

Дзеркальні відображення і умови збереження дзеркальних симетрій – інверсної та перестановочної симетрій – взяті за основу методу досліджень. Формалізація за допомогою алгебри геометричних побудов дзеркальних відображень на площині дозволила ввести матричні  $2 \times 2$  оператори дзеркальних відображень, які підкоряються алгебрі Кліффорда  $Cl_3$  і утворюють базис некомутативної геометрії. Компонентами в цьому векторному базисі є автокореляції або крос-кореляції компонент векторів вихідного та дзеркального відбиваного простору. Умови збереження дзеркальних симетрій визначило появу для базисних векторів  $nJ$ -перетворення – дискретних обертань на  $\pm n90^\circ$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). На основі цього перетворення введено своєрідний континуальний інтеграл [8], який за допомогою операції дзеркального відображення розширив представлення матричних операторів до матриць розмірності  $4 \times 4$ , а вихідний простір дзеркального відображення, в загальному випадку комплексний, з 4 до 8 вимірів.



Фізичну реалізацію описаних математичних результатів необхідно було шукати в процесах обернення, що виникають при дзеркальних відображеннях. Такий розв'язок отриманий для трьох дотичних підпросторів в “задзеркаллі-1” в термінах фізичних координат простору-часу. Використання континуального інтеграла для суми підпросторів дозволило в “задзеркаллі-2” підвищити розмірність базису некомутативної геометрії до алгебри  $Cl_4$ , яка включає матриці Дірака як бівектори векторної алгебри. Для того, щоб цей результат перетворення не залежав від енергії і частоти обертого процесу, процес повинен бути неklasичним, тобто має виконуватися співвідношення  $E = h\nu$ .

У “задзеркаллі-2” була створена модель чотирьохкомпонентного комплексного вектора, який представляє шестивимірний комплексний простір. У “задзеркаллі-3” побудовано відображення цієї моделі на шість векторів некомутативної геометрії з дійсними координатами. Ці координати є кроскореляціями компонент векторів із “задзеркалля-2” і дзеркально відображених в “задзеркаллі-3”. З фізичної точки зору представлену модель можна розглядати як тетракварк, побудований двома парами кварк-антикварк з різних поколінь кварків і зарядами  $\pm \frac{2}{3}q$ . Математичне доповнення показує, у який спосіб можна зв'язати розглянуту модель з електромагнітними полями.

*Висловлюю подяку Фонду “Життєлюб” в особі Юлії Парко і Андрію Степенко за допомогу при роботі над статтею.*

## ДОДАТОК

### Дотичний простір некомутативної геометрії алгебри $Cl_3$

У виразі (41) скористаємося принципом відповідності  $\hbar \rightarrow 0$ . В отриманому 4-векторі позначимо його компоненти як  $p_0 \rightarrow A_0$ , а коваріантні компоненти  $p_k \rightarrow -A_k$ . Використовуючи метрику простору Мінковського, отримуємо в нових позначеннях

$$\mathbf{W} = A^0 \mathbf{e}_0 + A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3. \quad (42)$$

Для 4-градієнта маємо також

$$\nabla = \partial_\alpha \mathbf{e}^\alpha = \partial_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^3 \partial_k \mathbf{e}_k. \quad (43)$$

Дотичний простір будується як внутрішній та зовнішній добуток, представлені антикомутатором і комутатором відно-

відно:

$$\nabla \mathbf{W} = \nabla \bullet \mathbf{W} + \nabla \wedge \mathbf{W} = \frac{1}{2} [\nabla, \bar{\mathbf{W}}]_- + \frac{1}{2} [\nabla, \bar{\mathbf{W}}]. \quad (44)$$

З цього виразу випливає

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \mathbf{W} &= \partial_\alpha A^\alpha \mathbf{e}_0, \\ \nabla \wedge \mathbf{W} &= -\partial_0 \mathbf{A} - \mathbf{grad} A^0 + \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (45)$$

де  $\mathbf{P}$  – полярний вектор,  $\mathbf{B}$  – аксіальний вектор,  $\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{grad} = \sum_{k=1}^3 \partial_k \mathbf{e}_k$  і  $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$  – бівектор з компонентами  $\partial_k A^r - \partial_r A^k$ ;  $k, r = 1, 2, 3$ .

1. H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 1. Introduction* (Cambridge University Press, 1988).
2. M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 2. Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology* (Cambridge University Press, 1988).
3. K. Hori, Sh. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow. *Mirror Symmetry* (American Mathematical Society, 2003), Vol. 1.
4. A. Connes, Matilde Marcolli. *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* (American Mathematical Society, 2007), Vol. 55.
5. B. Greene. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (W.W. Norton & Company, 2010), Ch. 15.
6. A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. arXiv:hep-th/9606040v2.
7. Yu.V. Khoroshkov. Mirror symmetry as a basis for constructing a space-time continuum. *Ukr. J. Phys.* **60** (5), 468 (2015).
8. J. Zinn-Justin. *Path integrals in quantum mechanics* (Oxford University Press, 2005).

Одержано 06.10.21

Yu.V. Khoroshkov

MIRROR SYMMETRY

AS AN ALGEBRA OF OPERATORS

IN NONCOMMUTATIVE GEOMETRY OF SPACE-TIME

The analysis of the geometric and algebraic properties of mirror mappings allowed the latter to be used as the operator algebra of a noncommutative geometry. The coordinates of the noncommutative geometry are auto- or cross-correlation coordinates in the mirror-mapped spaces. A particular case of the six-dimensional Kähler manifold which is mapped on the noncommutative geometry with the vector Clifford algebra  $Cl_4$  has been considered. This mapping corresponds to a tetraquark composed from two quark-anti-quark pairs with the charges  $\pm \frac{2}{3}q$  taken from different generations.

*Keywords:* mirror symmetry, noncommutative geometry, Clifford algebra, correlation.