О.К. ВІДИБІДА, О.В. ЩУР
Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України
*(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143; e-mail: vidybida@bitp.kiev.ua)*

УДК 539

# ТВІРНА ФУНКЦІЯ МОМЕНТІВ ДЛЯ СТАТИСТИКИ ВИХІДНОЇ АКТИВНОСТІ ІНТЕГРУЮЧОГО НЕЙРОНА З ВТРАТАМИ

*Досліджується статистика вихідної активності нейрона при його стимуляції потоком вхідних імпульсів, що утворюють стохастичний процес Пуассона. В ролі моделі нейрона взято інтегруючий нейрон з втратами. Знайдено нове представлення функції розподілу ймовірностей довжин вихідних міжімпульсних інтервалів. На його основі обчислено в явному вигляді твірну функцію моментів ймовірнісного розподілу. Остання, за теоремою Куртіса, повністю визначає сам розподіл. Зокрема, на основі твірної функції знайдено явні вирази для моментів всіх порядків. Момент першого порядку збігається із знайденим раніше. Формули для моментів другого і третього порядків перевірено чисельно шляхом прямого моделювання стохастичної динаміки нейрона з конкретними фізичними параметрами.*

*Ключові слова*: інтегруючий нейрон з втратами, стохастичний процес Пуассона, міжспайковий інтервал, моменти функції розподілу, твірна функція моментів.

## 1. Вступ

Інформація в мозку в основному представлена у вигляді нервових імпульсів. Усі ці імпульси приблизно однакові за висотою та шириною і називаються спайками, див. рис. 1. Єдине, що має значення – це момент часу, коли такий імпульс був згенерований або отриманий. При записі спайків за допомогою належних біофізичних інструментів отримується сильно нерегулярна послідовність. Її називають послідовністю спайків (англ. *spike train*). Важко знайти будь-який раціональний зміст у цих моментах отримання спайків, або часових проміжках між ними – міжімпульсних інтервалах (МІІ). Насправді ситуація ще гірша: у більшості випадків ці послідовності не відтворюються, якщо до експериментальної тварини кілька разів застосувати однакову стимуляцію. Це може бути головною причиною, чому нейронауковці в основному цікавляться саме статистичними властивостями послідовностей спайків. Фізики-теоретики також намагаються передбачити, якою саме може бути статистика і як вона змінюється при зміні стимулів або параметрів моделі. Дискусія у цьому напрямку триває. Як насправді представлена корисна інформація у послідовностях спайків? Що є істотно важливим: середня кількість спайків за одиницю часу (частотне кодування), чи їх точні часові положення (часове кодування)? На це питання немає чіткої відповіді. Спочатку ми припускали, що частотне кодування працює на периферії нервової системи. Прикладом актюатора на периферії нервової системи є нервово-м'язові синапси мотонейронів [1, Розд. 5.01.12]. Єдина команда, яка передається м'язу від мотонейрона, – це сила скорочення. Але сила скорочення визначається концентрацією нейромедіатора, який виділяється з нейронних закінчень з кожним приходом спайку. Чим більше спайків за одиницю часу, тим вищий рівень нейромедіатора, і тим більша сила скорочення м'язу. Отже, у цьому випадку має місце частотне кодування. Прикладом на сенсорній периферії головного мозку є рецептор нюху [2], де кількість спайків за одиницю часу залежить від концентрації запаху.

Але навіть на сенсорній периферії часове кодування може бути парадигмою кодування. Це спостерігається, наприклад, для ехолокації [3], де часове положення спайків з двох вух повинне бути визначеним з точністю до мікросекунд.

Зрозуміло також, що в механізмі часового кодування послідовність спайків може нести більше інформації, ніж у частотному кодуванні. Це може бути важливим для складніших інтелектуальних завдань, ніж скорочення м'язів або сприйняття запаху.

© О.К. ВІДИБІДА, О.В. ЩУР, 2021

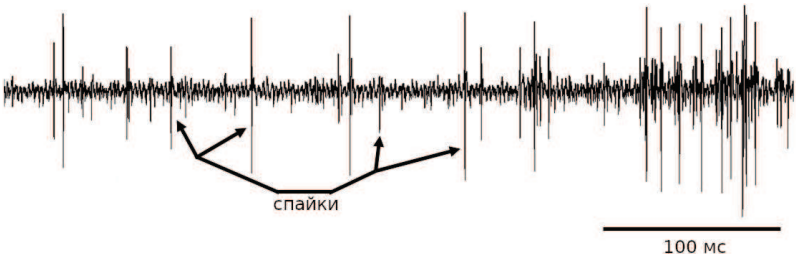


***Рис. 1.*** Приклад електричної активності в середовищі нейронів. Запис зроблено електродом, який поміщено в середовище. Отже, реєструється активність декількох нейронів одночасно. У випадку генерації нейроном вихідного імпульсу його мембранний потенціал різко змінюється. На рисунку в ці моменти видно короткочасні стрибки напруги – спайки. Різні спайки мають різну висоту, оскільки належать різним нейронам, які знаходяться на різних відстанях від реєструючого електрода. Окремий нейрон генерує спайки однакової висоти. Модифіковано з: `https://backyardbrains.com/experiments/spikerbox`

На жаль, більшість спроб обчислити статистику активності нейронів виключає можливість часового кодування через використання так званого дифузійного наближення. У такому підході нейронний стимул моделюється як дифузійний стохастичний процес, наприклад, Вінера або Орнштейна–Уленбека, див. [4, 5]. У дифузійному процесі будь-який скінченний інтервал часу містить нескінченно багато нескінченно малих спайків, отриманих при диференціюванні процесу Вінера. Тому у такому випадку для механізму часового кодування немає місця. У той самий час вихідна активність нейрона, стимульована дифузійним процесом, представлена скінченними спайками, що генеруються, коли напруга нейронної мембрани перевищує поріг збудження. Інтервали часу між цими спайками є скінченними, див. рис. 2. Ці спайки являють собою не дифузійний, а точковий процес, і, отже, їх не можна подавати в інший нейрон в рамках дифузійного наближення. Це означає, що підхід дифузійного наближення не є завершеним і самоузгодженим. Тому була зроблена спроба обчислити статистику вихідної активності нейрона без дифузійного наближення.

У наступних розділах ми коротко сформулюємо одержані раніше результати, на які спирається робота. Попередні результати стосуються статистики ативності інтегруючого нейрона з втратами (ІНВ) з порогом 2. Зокрема, раніше, [6, 7], були одержані явні вирази для функції розподілу вихідних міжімпульсних інтервалів (МІІ) на початковій ділянці значень довжини МІІ. Розподіл вхідних імпульсів вважається пуассонівським. Для більших значень МІІ функція розподілу представлена у вигляді сум кратних інтегралів. Це дозволило обчислити перший момент функції розподілу (середній МІІ). У цій роботі ми знаходимо інше представлення функції розподілу, яке дозволяє обчислити твірну функцію моментів. Ця функція дозволяє обчислити моменти розподілу всіх порядків шляхом застосування диференціювання до твірної функції. Крім того, за теоремою Куртіса [8] твірна функція моментів повністю визначає саму функцію розподілу.

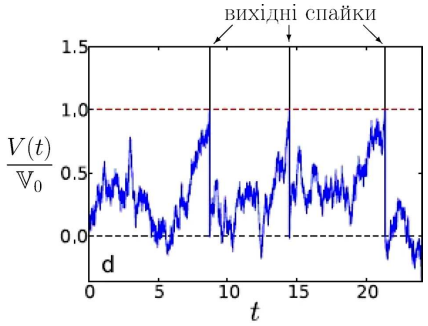


***Рис. 2.*** Часовий хід мембранного потенціалу нейрона, що змодельований дифузійним процесом. У моменти досягнення мембранним потенціалом $V(t)$ порога збудження $\mathbb{V}_0$ генеруються вихідні імпульси (спайки). Модифіковано з: A. Iolov, S. Ditlevsen & A. Longtin, DOI: 10.1186/2190-8567-4-4

## 2. Попередні результати

### *2.1. Опис моделі*

Інтегруючий нейрон з втратами, [9], характеризується трьома позитивними константами: $\tau$ – час релаксації; $\mathbb{V}_0$ – поріг збудження; $h$ – величина вхідного імпульсу. У будь-який момент $t$ стан ІНВ характеризується невід'ємним дійсним числом $V(t)$, яке інтерпретується як відхилення трансмембранної різниці потенціалів від стану спокою в бік депо-

ляризації, або, іншими словами, величина збудження. Тут вважається, що в стані спокою $V = 0$, а деполяризації відповідає позитивне значення $V$. Наявність втрат означає, що за відсутності зовнішніх стимулів величина $V(t)$ експоненційно зменшується:

$$V(t+s) = V(t)e^{-s/\tau}, \quad s > 0. \tag{1}$$

Вхідні стимули – це вхідні імпульси. Одержання вхідного імпульсу в момент $t$ підвищує $V(t)$ на величину $h$:

$$V(t) \to V(t) + h. \tag{2}$$

Нейрон характеризується пороговим значенням збудження $\mathbb{V}_0$. Останнє означає, що як тільки виконано умову $V(t) > \mathbb{V}_0$, ІНВ генерує вихідний імпульс і переходить в стан спокою, $V(t) = 0$. Відносно $h$ і $\mathbb{V}_0$ ми робимо таке припущення:

$$0 < h < \mathbb{V}_0 < 2h. \tag{3}$$

З (1) і (2) випливає, що ІНВ може згенерувати вихідний імпульс тільки в момент одержання вхідного. Умова (3) означає, що одного вхідного імпульсу, застосованого до ІНВ в стані спокою, не досить для генерації вихідного імпульсу, але вже два вхідних імпульси, отримані за короткий проміжок часу, можуть збудити ІНВ вище порога і згенерувати вихідний імпульс. Це означає, що нейрон має поріг 2 [1].

### *2.2. Функція розподілу довжин МІІ* [2]

Вважаємо, що описаний в Розд. 2.1 нейрон стимулюється потоком вхідних імпульсів, який утворює стохастичний процес Пуассона інтенсивності $\lambda$. Останнє означає, що ймовірність одержати на вході МІІ тривалості $t$ з точністю $dt$ дається таким виразом:

$$e^{-\lambda t}\,\lambda\,dt,$$

а також, що вхідні МІІ статистично незалежні. Введемо такі позначення:

$$T_2 = \tau \ln\left(\frac{h}{\mathbb{V}_0 - h}\right), \quad T_3 = \tau \ln\left(\frac{\mathbb{V}_0}{\mathbb{V}_0 - h}\right),$$
$$\Theta_m = T_2 + (m-3)T_3, \ m = 3, \ldots. \tag{4}$$

У роботах [6, 7] одержано таку формулу для функції розподілу вихідних МІІ:

$$P(t)dt = \sum_{k=2}^{m-1} \left(P_k^0(t)\lambda dt - P_k^-(t)\lambda dt\right) + P_m^0(t)\lambda dt, \tag{5}$$
$$t \in ]\Theta_m; \Theta_{m+1}], \ m \geq 2,$$

де $P(t)dt$ – це ймовірність одержати вихідний МІІ тривалості $t$ з точністю $dt$. Функції в правій частині (5) визначаються таким чином:

$$P_{k+1}^0(t)\lambda\,dt = \int\limits_{\Theta_{k+1}}^{t} P_k^-(s)\lambda\,ds\,e^{-\lambda(t-s)}\lambda\,dt, \tag{6}$$
$$t \geq \Theta_{k+1}, \quad k = 2, 3, ...,$$

$$P_k^-(t)\lambda dt = e^{-\lambda t}\lambda^k dt \int\limits_{\underline{t_1}}^{\overline{t_1}} dt_1 \int\limits_{\underline{t_2}}^{\overline{t_2}} dt_2 \ldots \int\limits_{\underline{t_{k-1}}}^{\overline{t_{k-1}}} dt_{k-1}, \tag{7}$$

де границі інтегрування визначаються з таких нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \leq t_1 \leq t - \Theta_{k+1}, \\ T_2 + \tau \ln\left(\sum\limits_{1\leq j\leq i} e^{t_j/\tau}\right) \leq t_{i+1}, \\ t_{i+1} \leq \tau \ln\left(e^{(t-\Theta_{k+1-i})/\tau} - \sum\limits_{1\leq j\leq i} e^{t_j/\tau}\right), \\ i = 1, ..., k-2. \end{cases} \tag{8}$$

Отже, функція розподілу вихідних МІІ повністю визначається функцією $P_k^-(t)$ при різних $k = 2, 3, \ldots$. Її фізичний зміст є наступним: якщо нейрон стартує зі стану спокою, $V(0) = 0$, то вираз $P_k^-(t)\lambda dt$ дає ймовірність одержати від вхідного процесу Пуассона $k$ послідовних вхідних імпульсів так, що останній з них потрапляє в інтервал $[t; t+dt[$ і при цьому не відбулось пострілу нейрона (не було перевищено порога збудження $\mathbb{V}_0$). У свою чергу, $P_k^0(t)\lambda\,dt$ дає ймовірність одержати $k$ імпульсів, останній в інтервалі $[t; t+dt[$ так, що пострілів не відбулось до $(k-1)$-го імпульсу включно. Зауважимо, що в формулі (7) при фіксованому $t$ $k$ не може приймати значень, більших від $k_{\max}$, де

$$k_{\max} = \left[\frac{t - T_2}{T_3}\right] + 2,$$

а квадратні дужки позначають цілу частину числа.

[1] Див. [10], де розглянуто випадок вищих порогів.
[2] В цьому розділі і далі $t$ позначає довжину МІІ.

### 3. Нове представлення функції розподілу

У цьому розділі ми подамо (7), (8) у більш простому вигляді, зручному для обчислення твірної функції моментів. Введемо з цією метою нові змінні інтегрування:

$$z_i = e^{-\frac{t-\Theta_{k+2-i}}{\tau}} \sum_{1\le j\le i} e^{\frac{t_j}{\tau}}, \quad i = 1, ..., k-1.$$

Область інтегрування (8) у нових змінних набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} e^{-\frac{t-\Theta_{k+1}}{\tau}} \le z_1 \le 1, \\ z_i \le z_{i+1} \le 1, \quad i = 1, ..., k-2. \end{cases} \tag{9}$$

Визначник якобіана переходу до нових змінних має такий вигляд:

$$\left|\det \left\| \frac{\partial z_j}{\partial t_i} \right\|\right| = \frac{1}{\tau^{k-1}} z_1 \prod_{2\le i\le k-1} (z_{i-1} - \beta z_i),$$

де $\beta = e^{-\frac{T_3}{\tau}}$. Враховуючи (9) і останнє, (7) можна подати в такому вигляді:

$$P_k^-(t) = e^{-\lambda t}(\lambda\tau)^{k-1} \int\limits_{B_k(t)}^{1} \frac{dz_1}{z_1} \int\limits_{z_1}^{1} \frac{dz_2}{z_2 - \beta z_1} ...$$

$$... \int\limits_{z_{k-2}}^{1} \frac{dz_{k-1}}{z_{k-1} - \beta z_{k-2}}, \tag{10}$$

де

$$B_k(t) = e^{-\frac{t-\Theta_{k+1}}{\tau}}.$$

Якщо ввести набір допоміжних функцій $f_i(x)$ наступними співвідношеннями:

$$f_0(x) \equiv 1, \ f_{i+1}(x) = \int\limits_x^1 \frac{dy}{y - \beta x} f_i(y), \ i = 0, ..., \tag{11}$$

то (10) можна записати так:

$$P_k^-(t) = e^{-\lambda t}(\lambda\tau)^{k-1} \int\limits_{B_k(t)}^{1} \frac{dx}{x} f_{k-2}(x). \tag{12}$$

Останній вираз разом з (5) і (6) далі використовується для обчислення твірної функції моментів.

### 4. Твірна функція

Моментами ймовірнісного розподілу $P(t)$ називаються величини $\mu_n$, задані формулою [3]

$$\mu_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n P(t) dt. \tag{13}$$

Тут перший момент – середнє значення випадкової величини, у нашому випадку – МІІ. Обчислення конкретних моментів може бути складним з огляду на складність виразу для $P(t)$. Задача спрощується при використанні твірної функції моментів.

Згідно з означенням твірна функція моментів $M_t(z)$ визначається такою формулою:

$$M_t(z) = \mathbb{E}\left[e^{tz}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tz} P(t) dt. \tag{14}$$

Для її обчислення, представимо функцію розподілу $P(t)$ (5) через допоміжні функції $f_i(x)$ (11). Для цього спочатку запишемо вираз (6) $P_k^0(t)$ через $f_i(x)$ (11), підставивши у нього (12):

$$P_{k+1}^0(t) = \lambda(t - \Theta_{k+1}) P_k^-(t) +$$

$$+ e^{-\lambda t} r^k \int\limits_{B_{k+1}(t)}^{1} \frac{\ln(x)}{x} f_{k-2}(x) dx, \tag{15}$$

де $r = \lambda\tau$.

Перегрупувавши доданки у сумі в правій частині (5) та підставивши туди (12) та (15), можна отримати такий вираз для функції розподілу $P(t)$ через функції $f_i(x)$:

$$P(t)dt = \lambda t e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda t} dt \times$$

$$\times \sum_{k=3}^{m} r^{k-2} \int\limits_{B_k(t)}^{1} \frac{dx}{x} f_{k-3}(x)(\lambda(t - \Theta_k) - 1 + r\ln(x)),$$

$$t \in ]\Theta_m; \Theta_{m+1}], \ m \ge 2.$$

Отримане використаємо в (14) для обчислення твірної функції розподілу:

$$M_t(z) = \frac{\lambda^2}{(\lambda - z)^2} +$$

$$+ \frac{\lambda z}{(\lambda - z)^2} \sum_{m=3}^{\infty} r^{m-2} e^{-(\lambda - z)\Theta_m} I_m(z), \ z < \lambda, \tag{16}$$

[3] В нашому випадку $t \le 0 \Rightarrow P(t) = 0$.

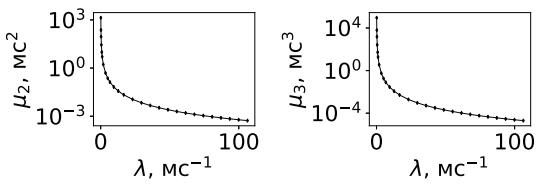


***Рис. 3.*** Залежність другого $\mu_2$ та третього $\mu_3$ моментів функції розподілу тривалостей MII від інтенсивності вхідного потоку $\lambda$. Ромби – результати чисельного моделювання методом Монте-Карло, суцільна лінія – обчислення згідно з формулами (21) і (20) при $n = 3$. Тут $\mathbb{V}_0 = 20$ мВ, $h = 11{,}2$ мВ, $\tau = 20$ мс

де введено такі допоміжні функції $I_m(z)$:

$$I_m(z) = \int\limits_0^1 dx\ f_m(x) x^{r-\tau z-1},\ m = 0, 1, \dots .$$

Знайдемо рекурентне співвідношення для функцій $I_m(z)$, підставивши (11) в останній вираз:

$$\begin{aligned} &I_m(z) = \Phi(\beta, 1, r-\tau z) I_{m-1}(z),\ m = 1, 2 \dots; \\ &I_0(z) = \frac{1}{r-\tau z}. \end{aligned} \tag{17}$$

Тут $\Phi(\beta, 1, r-\tau z)$ – трансцедент Лерха:

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-zx} (-\ln(x))^{s-1} x^{a-1}.$$

З рекурентного співвідношення (17) слідує, що

$$I_m(z) = \frac{1}{r-\tau z} \left(\Phi\left(\beta, 1, r-\tau z\right)\right)^m,\ m = 0, 1 \dots .$$

Підставимо останній вираз у (16) та використаємо означення $\Theta_m$ (4):

$$\begin{aligned} M_t(z) = &\frac{\lambda^2}{(\lambda-z)^2} + \frac{\lambda z}{(\lambda-z)^2} \frac{r}{r-\tau z} e^{-(\lambda-z)T_2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \left(r\beta^{r(1-\frac{z}{\lambda})} \Phi\left(\beta, 1, r-\tau z\right)\right)^m. \end{aligned} \tag{18}$$

Тут ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \left(r\beta^{r(1-\frac{z}{\lambda})} \Phi\left(\beta, 1, r-\tau z\right)\right)^m$ збігається в околі точки $z = 0$, оскільки $r\beta^r \Phi\left(\beta, 1, r\right) < 1$. Останнє доведено у теоремі 3 роботи [7].

Остаточно, після підсумовування у правій частині (18), в околі точки $z = 0$ твірна функція моментів має такий вигляд:

$$\begin{aligned} M_t(z) = &\frac{\lambda^2}{(\lambda-z)^2} + a^r \frac{\lambda z}{(\lambda-z)^2} \times \\ &\times \frac{r}{r-\tau z} \frac{e^{zT_2}}{1 - r\beta^r e^{zT_3} \Phi(\beta, 1, r-\tau z)}, \end{aligned} \tag{19}$$

де $a = e^{-\frac{T_2}{\tau}}$.

Оскільки в околі нуля твірна функція моментів скінченна, то, згідно з теоремою Куртіса [8], отримана твірна функція моментів (19) повністю визначає саму функцію розподілу $P(t)$.

За допомогою твірної функції моментів (19) можна знайти моменти функції розподілу:

$$\begin{aligned} \mu_n = &\left.\frac{d^n M_t(z)}{dz^n}\right|_{z=0} = \frac{(n+1)!}{\lambda^n} + \\ &+ \frac{n! a^r}{2\lambda^n} \frac{1}{1 - r\beta^r \Phi(\beta, 1, r)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda(T_2 - T_3))^m}{m!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{n-1-m} (n-m-k)(n-m-k+1) \Bigg(\delta_{k,0} + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^l l!}{(1 - r\beta^r \Phi(\beta, 1, r))^l} B_{k,l}(g_1, g_2, \dots, g_{k-l+1}) \Bigg), \end{aligned}$$

$$g_m = (-\lambda T_3)^m - m! r^{m+1} \beta^r \Phi(\beta, m+1, r); \tag{20}$$

де $\mu_n$ позначає $n$-й момент, $B_{k,l}(g_1, g_2, \dots, g_{k-l+1})$ – часткові експоненційні поліноми Белла.

Поклавши в останньому виразі $n = 1$, для першого моменту маємо:

$$\mu_1 = \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{a^r}{1 - r\beta^r \Phi(\beta, 1, r)},$$

що збігається з отриманим раніше у [7, Рівн. (46)]. Зауважимо, що у позначеннях роботи [7] $I(a, r) = \beta^r \Phi(\beta, 1, r)$.

Згідно з (20) при $n = 2$ другий момент має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mu_2 = &\frac{6}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{a^r}{1 - r\beta^r \Phi(\beta, 1, r)} \Bigg(3 + \lambda T_2 + \\ &+ \frac{r\beta^r \Phi(\beta, 1, r)}{1 - r\beta^r \Phi(\beta, 1, r)} \left(\lambda T_3 + r \frac{\Phi(\beta, 2, r)}{\Phi(\beta, 1, r)}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{21}$$

## 5. Чисельна перевірка

Для чисельної перевірки одержаних формул було написано програму, яка моделювала динаміку мембранного потенціалу нейрона, стимульованого

потоком вхідних імпульсів, які утворюють стохастичний процес Пуассона. Поведінка нейрона моделювалась протягом такого часу, щоб в результаті було одержано 1000 000 вихідних імпульсів, що дозволило обчислити густину ймовірності $P(t)$ і моменти розподілу, як показано в (13). Моделювання повторювалось для різних значень інтенсивностей вхідного потоку $\lambda$. Результати обчислення 2-го і 3-го моментів і їх порівняння з формулою (21) і (20) при $n = 3$ показано на рис. 3.

## 6. Висновки

У цій роботі розглянуто статистику активності інтегруючого нейрона з втратами при його стимуляції вхідними імпульсами, які утворюють стохастичний процес Пуассона. Для моделі нейрона з порогом двійка одержано вичерпний опис статистики довжин вихідних міжімпульсних інтервалів у термінах твірної функції моментів, яку знайдено явно, рівн. (19). Одержані формули перевірено шляхом чисельного моделювання динаміки нейрона з конкретними фізичними параметрами.

*Ця робота була підтримана Програмою фундаментальних досліджень Відділення Фізики і Астрономії Національної академії наук України "Індуковані шумом динаміка та кореляції в нерівноважних системах", № 0120U101347.*

1. J. Werner. Electrical activities in the body. In: *Comprehensive Biomedical Physics*. Edited by A. Brahme (Elsevier, 2014), Vol. 5.
2. J.C. Brookes. Olfaction: The physics of how smell works? *Contemp. Phys.* **52**, 385 (2011).
3. M. Denny. The physics of bat echolocation: Signal processing techniques. *Am. J. Phys.* **72**, 1465 (2004).
4. C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. 2nd edition (Springer-Verlag, 1985).
5. L. Sacerdote, M.T. Giraudo. Stochastic integrate and fire models: A review on mathematical methods and their applications. In: *Stochastic Biomathematical Models*. Edited by M. Bachar, J.J. Batzel, S. Ditlevsen (Springer-Verlag, 2013).
6. O.K. Vidybida. Output stream of leaky integrate and fire neuron. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* **2014** (12), 18 (2014).
7. A.K. Vidybida. Output stream of leaky integrate-and-fire neuron without diffusion approximation. *J. Stat. Phys.* **166**, 267 (2017).
8. J.H. Curtiss. A note on the theory of moment generating functions. *Ann. Math. Stat.* **13**, 430 (1942).
9. A.N. Burkitt. A review of the integrate-and-fire neuron model: I. homogeneous synaptic input. *Biol. Cybern.* **95**, 1 (2006).
10. K. Kravchuk. Leaky integrate-and-fire neuron under poisson stimulation. In: *Proceedings of 2016 II International Young Scientists Forum on Applied Physics and Engineering (YSF)* (IEEE, 2016), p. 203.

Одержано 02.06.20

*A.K. Vidybida, O.V. Shchur*

MOMENT-GENERATING
FUNCTION OF OUTPUT STREAM
OF LEAKY INTEGRATE-AND-FIRE NEURON

The statistics of the output activity of a neuron during its stimulation by the stream of input impulses that forms the stochastic Poisson process is studied. The leaky integrate-and-fire neuron is considered as a neuron model. A new representation of the probability distribution function of the output interspike interval durations is found. Based on it, the moment-generating function of the probability distribution is calculated explicitly. The latter, according to the Curtiss theorem, completely determines the distribution itself. In particular, explicit expressions are derived from the moment-generating function for the moments of all orders. The first moment coincides with the one found earlier. Formulas for the second and third moments have been checked numerically by direct modeling of the stochastic dynamics of a neuron with specific physical parameters.

*K e y w o r d s:* leaky integrate-and-fire neuron, stochastic Poisson process, interspike interval, moments of probability distribution, moment-generating function.