

О.В. БАРАБАШ,¹ Т.В. ГОРКАВЕНКО,¹ В.М. ГОРКАВЕНКО,¹ О.М. ТЕСЛИК,¹
Н.С. ЯКОВЕНКО,¹ А.О. ЗАПОРОЖЧЕНКО,¹ Е.В. ГОРБАР^{1,2}

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Фізичний факультет

(Вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601)

² Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143)

АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ ДИНАМІЧНОГО ТЕРТЯ ДЛЯ СФЕРИ ПЛАММЕРА В НАДЛЕГКІЙ ТЕМНІЙ МАТЕРІЇ

УДК 539

Визначено силу динамічного тертя, що діє на неточковий об'єкт (кульові скупчення та карликові галактики), який рухається в середовищі надлегкої бозонної темної матерії у стані бозе-айнштайнівського конденсату. Моделюючи неточковий об'єкт як сферу Пламмера радіуса l_p , ми знайшли аналітичні вирази для радіальної та тангенціальної компонент сили динамічного тертя, які в граничному випадку $l_p \rightarrow 0$ переходять у відповідні аналітичні вирази, отримані в літературі для точкового об'єкта. Проаналізовано залежність сили динамічного тертя від маси бозона та встановлено її немонотонний характер в інтервалі мас 10^{-23} – 10^{-21} еВ.

Ключові слова: надлегка бозонна темна матерія, сфера Пламмера, сила динамічного тертя, кулясті скупчення, карликові галактики.

1. Вступ

Динамічне тертя, що діє на об'єкти, які рухаються в галактичному середовищі, є важливим та широко вивченим явищем. Його вперше досліджував Чандрасекар [1], який проаналізував гравітаційний опір рухомій зірці через флуктуаційне гравітаційне поле сусідніх зірок. Пізніше це дослідження було поширено на випадок газового середовища [2–6].

Нещодавно моделі надлегкої темної матерії (НЛТМ) з масами частинок у діапазоні 10^{-23} – 10^{-21} еВ привернули значну увагу завдяки своїй інтригуючій феноменології; див. роботи [7–10]. Ці моделі успішно відтворюють великомасштабну структуру Всесвіту, подібно до моделей холодної темної матерії (ХТМ), та дозволяють уникнути деяких проблем малого масштабу, з якими стикаю-

ться моделі ХТМ. Особливістю НЛТМ є формування бозе-айнштайнівського конденсату (БАК) надлегких бозонів у галактичних центрах [11].

Щодо динамічного тертя, яке діє на рухомі об'єкти в середовищі НЛТМ, воно було досліджено для точкових зондів у випадку розмитого (fuzzy) НЛТМ, коли самовзаємодія темної матерії відсутня [12–15]. Проте, було виявлено, що навіть досить слабка самовзаємодія НЛТМ може помітно змінити силу тертя, що впливає на рух зірок [16–19]. У більших масштабах динамічне тертя також відіграє важливу роль у русі та еволюції більш масивних та просторово протяжних астрофізичних об'єктів, таких як кулясті скупчення та карликові галактики. Оскільки динамічне тертя пропорційне квадрату маси рухомого об'єкта, його вплив на кулясті скупчення може бути значно сильнішим порівняно з випадком окремих зірок [20].

Кулясті скупчення (а іноді й карликові галактики) часто моделюються за допомогою профілю щільності сфери Пламмера [21]. Оскільки довжина хвилі де Бройля частинок темної матерії, що складають НЛТМ, може бути значно більшою за міжзоряні відстані в межах кулястого скупчення, ефект динамічного тертя не є простою сумою сил динамічного тертя окремих зірок [13, 22]. Та-

Цитування: Барабаш О.В., Горкавенко Т.В., Горкавенко В.М., Теслик О.М., Яковенко Н.С., Запорожченко А.О., Горбар Е.В. Аналітичні розрахунки динамічного тертя для сфери Пламмера в надлегкій темній матерії. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 11, 772 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

кож варто зазначити, що розміри кулястих скупчень (до 10 пк) значно менші за довжину хвилі де Бройля НЛТМ (приблизно дорівнює або перевищує 300 пк). Чисельне моделювання показало, що для протяжних об'єктів, таких як кулясті скупчення, сила тертя слабша, ніж для точкових зондів з такою ж загальною масою, що потенційно вирішує проблему часу життя кулястих скупчень карликової галактики Форнакс [17, 23].

У карликових галактиках, таких як Форнакс, кулясті скупчення містяться всередині солітонного ядра НЛТМ у стані БАК. Це спонукає нас проаналізувати в цій статті динамічну силу тертя, що діє на рухому сферу Пламмера в оточенні БАК надлегкої бозонної темної матерії.

Динамічна сила тертя, що діє на об'єкт, який рухається по колу (змодельований як сфера Пламмера) в солітонному ядрі БАК, була раніше визначена в роботі [24]. Хоча вираз для тангенціальної сили був отриманий в аналітичній формі, зручний для розрахунків, радіальна складова сили динамічного тертя була задана як головне значення Коші інтеграла за імпульсом і обчислювалася лише чисельно. У цій статті нашою метою є інтегрування за імпульсом та отримання радіальної складової сили динамічного тертя в тій самій аналітичній формі, в якій вона була отримана в літературі для точкового зонда [19].

Стаття має таку структуру. Розгляд динамічного тертя для сфери Пламмера, що рухається по колу, в лінійному підході представлено в розділі 2. Аналітичний розрахунок уявної та дійсної складових цієї сили наведено в розділі 3. Залежність сили динамічного тертя від маси бозонної частинки m проаналізовано в розділі 4. Висновки зроблено в розділі 5.

2. Динамічна сила тертя для сфери Пламмера, що рухається по колу

У цьому розділі ми визначимо динамічну силу тертя, що діє на сферу Пламмера, яка рухається по коловій орбіті з радіусом r_0 з постійною кутовою швидкістю Ω у стаціонарному режимі в надлегкій темній матерії, що складається з надлегких бозонних частинок, кожна з масою m .

Розглянемо сферу Пламмера з радіусом l_p та повною масою M , профіль густини якої задається

формулою

$$\rho_{\text{Pl}}(\mathbf{r}) = \frac{3M}{4\pi l_p^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{l_p^2}\right)^{5/2}}. \quad (1)$$

Цей профіль густини приблизно постійний для $r < l_p$ і швидко зменшується як $\sim 1/r^5$ для $r > l_p$. Використовуючи [25], ми легко знаходимо наступне перетворення Фур'є для розподілу густини у сфері Пламмера:

$$\rho_{\text{Pl}}(\mathbf{k}) = M k l_p K_1(k l_p) \equiv \rho_{\text{Pl}}(k l_p), \quad (2)$$

де $K_1(x)$ – модифікована функція Бесселя другого роду. Оскільки $K_1(x) \rightarrow 1/x$ коли $x \rightarrow 0$, ми знаходимо, що $\rho_{\text{Pl}}(k l_p) \rightarrow M$ коли $l_p \rightarrow 0$. Як і очікувалося, це означає, що профіль густини маси сфери Пламмера в просторі імпульсів прямує до профілю густини маси точкового зонда, заданого рівнянням $\rho_p(\mathbf{k}) = M$.

Для аналізу динамічної сили тертя ми дотримуємося схеми, розробленої в роботах [18, 26], і припускаємо, що густина незбуреної НЛТМ має постійне значення ρ_0 . Потім, рухаючись, сфера Пламмера збурює густину НЛТМ внаслідок гравітаційної взаємодії $\rho_{\text{DM}}(t, \mathbf{r}) = \rho_0(1 + \alpha(t, \mathbf{r}))$. Використовуючи результати роботи [26] для самовзаємодіючої НЛТМ та узагальнюючи відповідний аналіз на цей випадок, отримуємо, що неоднорідність густини НЛТМ $\alpha(t, \mathbf{r})$ визначається таким рівнянням у межах підходу лінійного відгуку:

$$\partial_t^2 \alpha - c_s^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \alpha + \frac{\nabla_{\mathbf{r}}^4 \alpha}{4m^2} = 4\pi G \rho_{\text{Pl}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{CM}}(t)). \quad (3)$$

Тут c_s – це адіабатична швидкість звуку в надплинній рідині ТМ, яка визначається першою похідною тиску по густині [10],

$$c_s = \frac{\sqrt{g \rho_{\text{DM}}}}{m}, \quad (4)$$

ρ_{DM} – густина ТМ, g – константа зв'язку самовзаємодії ТМ, а m – маса частинки ТМ. Оскільки тиск пропорційний g , швидкість звуку c_s зникає в розмитій темній матерії, де $g = 0$. Радіус-вектор $\mathbf{r}_{\text{CM}}(t)$ позначає положення центру мас рухомої сфери Пламмера. Загальна динамічна сила тертя, що діє на рухому сферу Пламмера (для детального розгляду див. роботу [24]), визначає-

ться як

$$\mathbf{F}_{\text{fr}}(t) = (4\pi G)^2 \rho_0 \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{d\omega d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \times \\ \times \frac{\rho_{\text{Pl}}(-\mathbf{k})\rho_{\text{Pl}}(\mathbf{k}) e^{-i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\text{CM}}(t) - i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\text{CM}}(t-\tau)}}{-(\omega + i\epsilon)^2 + c_s^2 \mathbf{k}^2 + \frac{\mathbf{k}^4}{4m^2}}. \quad (5)$$

Оскільки $\rho_{\text{Pl}}(\mathbf{k})$ залежить лише від абсолютного значення імпульсу, k , подальше інтегрування $d^3 k = k^2 dk d\Omega_k$ по Ω_k відбувається, як у роботі [19], і ми отримуємо наступну повну динамічну силу тертя, що діє на сферу Пламмера, що рухається по колу:

$$\mathbf{F}_{\text{fr}}(t) = -\frac{4\pi G^2 M^2 \rho_0}{c_s^2} \mathcal{F}, \quad (6)$$

де $\mathcal{F}$ – це безрозмірна сила, ненульові радіальна та тангенціальна складові якої дорівнюють

$$\mathcal{F} = \sum_{\ell=1}^{\ell_{\text{max}}} \sum_{m_l=-\ell}^{\ell-2} \gamma_{\ell m_l} \left\{ \text{Re} \left(S_{\ell, \ell-1}^{m_l} - S_{\ell, \ell-1}^{m_l+1*} \right) \hat{r} + \right. \\ \left. + \text{Im} \left(S_{\ell, \ell-1}^{m_l} - S_{\ell, \ell-1}^{m_l+1*} \right) \hat{\phi} \right\}. \quad (7)$$

Тут

$$\gamma_{\ell m_l} = (-1)^{m_l} \frac{(\ell - m_l)!}{(\ell - m_l - 2)!} \times \\ \times \left\{ \Gamma \left(\frac{1 - \ell - m_l}{2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{\ell - m_l}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma \left(\frac{3 - \ell + m_l}{2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{\ell + m_l}{2} \right) \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Ключовою величиною, що визначає силу динамічного тертя, є

$$S_{\ell, \ell-1}^{m_l} = \frac{c_s^2}{M^2} \int_0^{+\infty} \frac{kd k \rho_{\text{Pl}}^2(kl_p) j_\ell(kr_0) j_{\ell-1}(kr_0)}{c_s^2 k^2 + \frac{k^4}{4m^2} - (m_l \Omega + i\epsilon)^2}, \quad (9)$$

де $\epsilon \rightarrow +0$, ℓ і m_l – це азимутальні та квантові числа відповідно, а $j_\ell(x)$ – сферична функція Бесселя. У випадку точкового зонда, де $\rho_{\text{Pl}}(kl_p) \rightarrow M$, інтеграл по k у рівнянні (9) було обчислено аналітично в роботі [19]. У наступному розділі ми обчислимо цей інтеграл для $\rho_{\text{Pl}}(kl_p)$ і знайдемо аналітичні вирази для дійсної та уявної частин $S_{\ell, \ell-1}^{m_l}$.

3. Аналітичне обчислення $S_{\ell, \ell-1}^{m_l}$

Представляючи функцію $\rho_{\text{Pl}}(kl_p)$ в інтегральній формі

$$\rho_{\text{Pl}}(kl_p) = M \int_0^\infty \frac{\cos(kl_p x)}{(1+x^2)^{3/2}} dx \quad (10)$$

та враховуючи, що підінтегральна функція є парною функцією x , отримуємо

$$\rho_{\text{Pl}}^2(kl_p) = \frac{M^2}{4} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \times \\ \times \frac{e^{il_p u k} + e^{-il_p u k}}{(1 + \frac{1}{4}(u+v)^2)^{3/2} (1 + \frac{1}{4}(u-v)^2)^{3/2}} = \\ = \frac{M^2}{4} \eta(kl_p), \quad (11)$$

де $u = x + y$, $v = x - y$, та

$$\eta(kl_p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{il_p u k} + e^{-il_p u k}}{f(u, v)} du dv, \quad (12)$$

$$f(u, v) = \left(1 + \frac{1}{4}(u+v)^2 \right)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{4}(u-v)^2 \right)^{3/2}. \quad (13)$$

Сферичні функції Бесселя $j_l(x)$ можна виразити через сферичні функції Ганкеля $h_l^{(1,2)}(x)$:

$$j_l(x) = \frac{1}{2} (h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)). \quad (14)$$

Далі, зручно розбити добуток $j_l(x)j_{l-1}(x)$ на дві компоненти, які містять як множник лише одну експоненціальну функцію, e^{2ix} або e^{-2ix} (див. деталі, наприклад, в [25]),

$$4j_l(x)j_{l-1}(x) = \underbrace{h_l^{(1)}(x)h_{l-1}^{(1)}(x) + h_l^{(1)}(x)h_{l-1}^{(2)}(x)}_{g_1(x)} + \\ + \underbrace{h_l^{(2)}(x)h_{l-1}^{(2)}(x) + h_l^{(2)}(x)h_{l-1}^{(1)}(x)}_{g_2(x)} = g_1(x) + g_2(x), \quad (15)$$

де

$$g_1(x) = a_1(x) + ib_1(x) + (a_2(x) - ib_2(x))e^{2ix}, \\ g_2(x) = a_1(x) - ib_1(x) + (a_2(x) + ib_2(x))e^{-2ix}, \quad (16) \\ g_1(-x) = -g_2(x).$$

Тут $a_i(x)$ та $b_i(x)$ – це поліноми від обернених степеней x . Тоді рівняння (9) набуває вигляду

$$S_{l,l-1}^{m_l} = \frac{c_s^2 m^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \eta(k l_p)}{\Pi(k^2)} (g_1(k r_0) + g_2(k r_0)) dk, \quad (17)$$

де $\Pi(k^2) = (k^2 + \varkappa^2)(k^2 - k_3^2)$, і ми використали рівність

$$4m^2 c_s^2 k^2 + k^4 - 4m^2 m_l^2 \Omega^2 = (k + i\varkappa)(k - i\varkappa)(k - k_3)(k + k_3) \quad (18)$$

де

$$\varkappa = \sqrt{2} m c_s \left(\sqrt{1 + \frac{m_l^2 \Omega^2}{m^2 c_s^4}} + 1 \right)^{1/2}, \quad (19)$$

$$k_3 = \sqrt{2} m c_s \left(\sqrt{1 + \frac{m_l^2 \Omega^2}{m^2 c_s^4}} - 1 \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Функція $\eta(k l_p)$ визначена в рівнянні (11) і має структуру

$$\eta(k l_p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d u d v}{f(u, v)} (e^{i l_p u k} + e^{-i l_p u k}).$$

Зауважимо, що функції $k g_1(k r_0)$ та $k g_2(k r_0)$ мають лише один простий полюс у точці $k = 0$. Отже, ми можемо розбити інтеграл у рівнянні (17) на два інтеграли

$$S_{l,l-1}^{m_l} = \frac{c_s^2 m^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \eta(k l_p)}{\Pi(k^2)} g_1(k r_0) dk + \frac{c_s^2 m^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \eta(k l_p)}{\Pi(k^2)} g_2(k r_0) dk = S_1 + S_2, \quad (21)$$

які збігаються в сенсі головного значення Коші (що позначено символом f).

Замінивши $k \rightarrow -k$ у другому інтегралі (S_2) та врахувавши, що $g_2(-k) = -g_1(k)$, знаходимо, що $S_2 = S_1$. Отже,

$$S_{l,l-1}^{m_l} = 2S_1 = \frac{c_s^2 m^2}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d u d v}{f(u, v)} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i l_p u k} + e^{-i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) dk}_J. \quad (22)$$

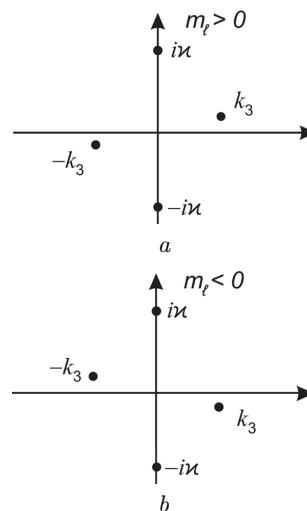


Рис. 1. Полоси підінтегрального виразу в J на комплексній площині k при $m_l > 0$ (а) та $m_l < 0$ (б)

Для J маємо

$$J = \int_C \frac{e^{i l_p u k} + e^{-i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) dk + i\pi \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{e^{i l_p u k} + e^{-i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) \right), \quad (23)$$

де контур C відповідає інтегруванню від $-\infty$ до $+\infty$ вздовж дійсної осі k і проходить навколо точки $k = 0$ у верхній півплощині. Далі,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{i l_p u k} + e^{-i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) dk &= \\ &= \int_C \frac{e^{i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) dk + \int_C \frac{e^{-i l_p u k}}{\Pi(k^2)} k g_1(k r_0) dk = \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Щоб обчислити інтеграл J_1 , ми замикаємо контур у верхній півплощині й застосовуємо формулу Коші. Почнемо з випадку $m_l > 0$. У верхній півплощині маємо два простих полюси коли $k = k_3$ і $k = i\varkappa$; див. рис. 1. Знаходимо, що

$$J_1 = \frac{\pi i}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-e^{-\varkappa l_p u} g_1(i\varkappa r_0) + e^{i l_p u k_3} g_1(k_3 r_0) \right). \quad (25)$$

Щоб обчислити J_2 , слід розглянути два випадки: $l_p u > 2r_0$ та $l_p u < 2r_0$. Маємо

$$J_2 = \int_C \frac{k e^{-i l_p u k} g_1(k r_0)}{\Pi(k^2)} dk =$$

$$= \int_C \frac{ke^{-il_p uk}}{\Pi(k^2)} \underbrace{(a_1 + ib_1)}_{h_l^{(1)} h_{l-1}^{(2)}} + \underbrace{(a_2 - ib_2)e^{2ikr_0}}_{h_l^{(1)} h_{l-1}^{(1)}} dk. \quad (26)$$

(i) Випадок $l_p u > 2r_0$. Замикаючи контур у нижній півплощині та застосовуючи формулу Коші, знаходимо

$$J_2 = \frac{\pi i}{\varkappa^2 + k_3^2} (-e^{-\varkappa l_p u} g_2(i\varkappa r_0) + e^{il_p uk_3} g_2(k_3 r_0)) - 2\pi i \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{kg_1(kr_0)e^{-il_p uk}}{\Pi(k^2)} \right), \quad (27)$$

де останній член зумовлений полюсом у $k = 0$, і ми врахували, що $g_1(-z) = -g_2(z)$.

(ii) Випадок $l_p u < 2r_0$. Тепер для доданка $h_l^{(1)} h_{l-1}^{(2)}$ потрібно замкнути контур у нижній півплощині, а для доданка з $h_l^{(1)} h_{l-1}^{(1)}$ – у верхній півплощині. Отримуємо

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_C \frac{ke^{-il_p uk}}{\Pi(k^2)} \times \\ &\times \left[h_l^{(1)}(kr_0) h_{l-1}^{(2)}(kr_0) + h_l^{(1)}(kr_0) h_{l-1}^{(1)}(kr_0) \right] dk = \\ &= \frac{\pi i}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-e^{-\varkappa l_p u} h_l^{(2)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i\varkappa r_0) + \right. \\ &+ e^{il_p uk_3} h_l^{(2)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0) \Big) - \\ &- 2\pi i \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k h_l^{(1)}(kr_0) h_{l-1}^{(2)}(kr_0) e^{-il_p uk}}{\Pi(k^2)} \right) + \\ &+ \frac{\pi i}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-e^{\varkappa l_p u} h_l^{(1)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i\varkappa r_0) + \right. \\ &+ e^{-il_p uk_3} h_l^{(1)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0) \Big). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, маємо такі результати для

$$J = J_1 + J_2 + i\pi \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{e^{il_p uk} + e^{-il_p uk}}{\Pi(k^2)} kg_1(kr_0) \right).$$

(i) Випадок $l_p u > 2r_0$. Інтеграл J дорівнює

$$J = \frac{4\pi i}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-e^{-\varkappa l_p u} j_l(i\varkappa r_0) j_{l-1}(i\varkappa r_0) + e^{il_p uk_3} j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0) \right). \quad (29)$$

Лишок функції

$$-2\pi \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{kg_1(kr_0) \sin(l_p uk)}{\Pi(k^2)} \right) \quad (30)$$

дорівнює нулю, оскільки чисельник регулярний коли $k = 0$.

(ii) Випадок $l_p u < 2r_0$. Ми маємо

$$\begin{aligned} J &= \frac{i\pi}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-e^{-\varkappa l_p u} (h_l^{(1)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i\varkappa r_0) + \right. \\ &+ h_l^{(1)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(2)}(i\varkappa r_0) + h_l^{(2)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i\varkappa r_0)) - \\ &- e^{\varkappa l_p u} h_l^{(1)}(i\varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i\varkappa r_0) + \\ &+ e^{-il_p uk_3} h_l^{(1)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0) + \\ &+ e^{il_p uk_3} (h_l^{(1)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0) + h_l^{(1)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(2)}(k_3 r_0) + \\ &+ h_l^{(2)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0)) \Big) + \\ &+ 2\pi i \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k h_l^{(1)}(kr_0)}{\Pi(k^2)} (e^{il_p uk} j_{l-1}(kr_0) + \right. \\ &+ i e^{-il_p uk} y_{l-1}(kr_0)) \Big), \end{aligned} \quad (31)$$

де $y_l(x) = (h_l^{(1)}(x) - i h_l^{(2)}(x))/2i$ – сферична функція Неймана. Для уявної частини J ,

$$\operatorname{Im} J = \frac{4\pi}{\varkappa^2 + k_3^2} j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0) \cos(l_p uk_3), \quad (32)$$

якщо $l_p u > 2r_0$, та

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} J &= \frac{4\pi}{\varkappa^2 + k_3^2} j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0) \cos(l_p uk_3) - \\ &- 2\pi \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k \cos(l_p uk)}{\Pi(k^2)} y_l y_{l-1}(kr_0) \right), \end{aligned} \quad (33)$$

якщо $l_p u < 2r_0$. Лишок функції у виразі (33) дорівнює нулю, оскільки функція є парною. Отже, для уявної частини $S_{l,l-1}^{m_l}$ знаходимо такий вираз:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S_{l,l-1}^{m_l} &= \frac{\pi c_s^2 m^2 j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0)}{\varkappa^2 + k_3^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(l_p uk)}{f(u, v)} du dv = \\ &= \frac{2\pi c_s^2 m^2 \rho_{P1}^2(k_3 l_p) j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0)}{M^2(\varkappa^2 + k_3^2)}, \end{aligned} \quad (34)$$

що точно збігається з результатом, отриманим раніше в роботі [24]. Крім того, переходячи до границі зникаючого радіуса сфери Пламмера ($l_p \rightarrow 0$) та використовуючи те, що $\rho_{P1}(x) \rightarrow M$ коли $x \rightarrow 0$, ми отримуємо вираз, який повністю узгоджується з уявною частиною, знайденою в роботі [19] для випадку точкового зонда.

Перейдемо до дійсної частини $S_{l,l-1}^{m_l}$ і почнемо з дійсної частини J . Маємо

$$\Re J = -\frac{4\pi}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(i e^{-\varkappa l_p u} j_l(i \varkappa r_0) j_{l-1}(i \varkappa r_0) + j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0) \sin(l_p u k_3) \right) \quad (35)$$

якщо $l_p u > 2r_0$ та

$$\begin{aligned} \Re J = & \frac{\pi}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-i e^{-\varkappa l_p u} (2j_l(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i \varkappa r_0) + h_l^{(1)}(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(2)}(i \varkappa r_0)) - e^{\varkappa l_p u} h_l^{(1)}(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i \varkappa r_0) - \right. \\ & \left. - \sin(l_p u k_3) (h_l^{(1)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(2)}(k_3 r_0) + h_l^{(2)}(k_3 r_0) h_{l-1}^{(1)}(k_3 r_0)) - \right. \\ & \left. - 2 \cos(l_p u k_3) (j_l(k_3 r_0) y_{l-1}(k_3 r_0) + y_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0)) \right) - \frac{2\pi}{\varkappa^2 k_3^2 r_0^2} - \\ & - 2\pi \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k}{\Pi(k^2)} y_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0) \sin(l_p u k) \right) \quad (36) \end{aligned}$$

якщо $l_p u < 2r_0$. Останні два доданки у формулі (36) зумовлені лишком функції у виразі (31)

$$\begin{aligned} i \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k h_l^{(1)}}{\Pi(k^2)} (e^{i l_p u k} j_{l-1}(kr_0) + i e^{-i l_p u k} y_{l-1}(kr_0)) \right) = \\ = -\operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k}{\Pi(k^2)} (\sin(l_p u k) j_l(kr_0) j_{l-1}(kr_0) + \right. \\ + \cos(l_p u k) j_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0) + \\ + \sin(l_p u k) y_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0) + \\ \left. + \cos(l_p u k) y_l(kr_0) j_{l-1}(kr_0)) \right), \quad (37) \end{aligned}$$

де ми врахували, що лишок парної функції при нульовому значенні її аргумента дорівнює нулю. Перші два члени є регулярними в нулі, а отже,

їхній внесок дорівнює нулю. Останній доданок має простий полюс у нулі й може бути легко обчислений за допомогою асимптотик

$$j_{l-1}(x) = \frac{x^{l-1}}{(2l-1)!!} + O(x^{l+1}), \quad (38)$$

$$y_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} + O(x^{l-1}). \quad (39)$$

Знаходимо

$$\operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{\cos(l_p u k)}{\Pi(k^2)} k y_l(kr_0) j_{l-1}(kr_0) \right) = \frac{1}{\varkappa^2 k_3^2 r_0^2}. \quad (40)$$

Щодо лишку функції в рівнянні (36), він дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta(u) = \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k \sin(l_p u k)}{\Pi(k^2)} y_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0) \right) = \\ = \frac{1}{\varkappa^2 + k_3^2} \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(2n)!(l+n)!}{4^n (n!)^2 (l-n-1)!} \times \\ \times \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{k_3^{2m+2}} + \frac{(-1)^m}{\varkappa^{2m+2}} \right) \frac{(-1)^{n-m} (l_p u)^{2(n-m)+1}}{r_0^{2n+3} (2n-2m+1)!}. \quad (41) \end{aligned}$$

Деталі його розрахунку наведено в Додатку.

Зрештою, використовуючи рівняння (35), (36) і (37), отримуємо дійсну частину $S_{l,l-1}^{m_l}$ коли $m_l > 0$:

$$\begin{aligned} \Re S_{l,l-1}^{m_l} = \frac{\pi c_s^2 m^2}{\varkappa^2 + k_3^2} \left(-i R_1 j_l(i \varkappa r_0) j_{l-1}(i \varkappa r_0) - \right. \\ - R_2 j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0) - \frac{Q_2}{2} (y_l(k_3 r_0) y_{l-1}(k_3 r_0) + \\ + j_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0)) - \frac{Q_3}{2} (j_l(k_3 r_0) y_{l-1}(k_3 r_0) + \\ + y_l(k_3 r_0) j_{l-1}(k_3 r_0)) - \frac{i Q_1^-}{4} (2j_l(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i \varkappa r_0) + \\ + h_l^{(1)}(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(2)}(i \varkappa r_0)) - \frac{i Q_1^+}{4} h_l^{(1)}(i \varkappa r_0) h_{l-1}^{(1)}(i \varkappa r_0) \left. \right) \\ - \frac{\pi c_s^2 m^2}{2 \varkappa^2 k_3^2 r_0^2} Q_4 - \frac{\pi m^2 c_s^2}{2} Q_5, \quad (42) \end{aligned}$$

де

$$R_1 = \int_{\frac{2r_0}{l_p}}^{\infty} du \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varkappa l_p u}}{f(u, v)} dv, \quad R_2 = \int_{\frac{2r_0}{l_p}}^{\infty} du \int_0^{\infty} \frac{\sin(k_3 l_p u)}{f(u, v)} dv, \quad (43)$$

$$Q_1^\pm = \int_0^{\frac{2r_0}{l_p}} du \int_0^\infty \frac{e^{\pm \kappa l_p u}}{f(u, v)} dv, \quad Q_2 = \int_0^{\frac{2r_0}{l_p}} du \int_0^\infty \frac{\sin(k_3 l_p u)}{f(u, v)} dv, \quad (44)$$

$$Q_3 = \int_0^{\frac{2r_0}{l_p}} du \int_0^\infty \frac{\cos(k_3 l_p u)}{f(u, v)} dv, \quad Q_4 = \int_0^{\frac{2r_0}{l_p}} du \int_0^\infty \frac{dv}{f(u, v)}, \quad (45)$$

$$Q_5 = \int_0^{\frac{2r_0}{l_p}} du \int_0^\infty \frac{\Delta(u) dv}{f(u, v)}. \quad (46)$$

У випадку $m_l < 0$, нам треба зробити заміну $k_3 \rightarrow -k_3$. Оскільки вираз (42) є парною функцією від k_3 , то той самий вираз для дійсної частини $S_{l, l-1}^{m_l}$ може бути застосований коли $m_l < 0$.

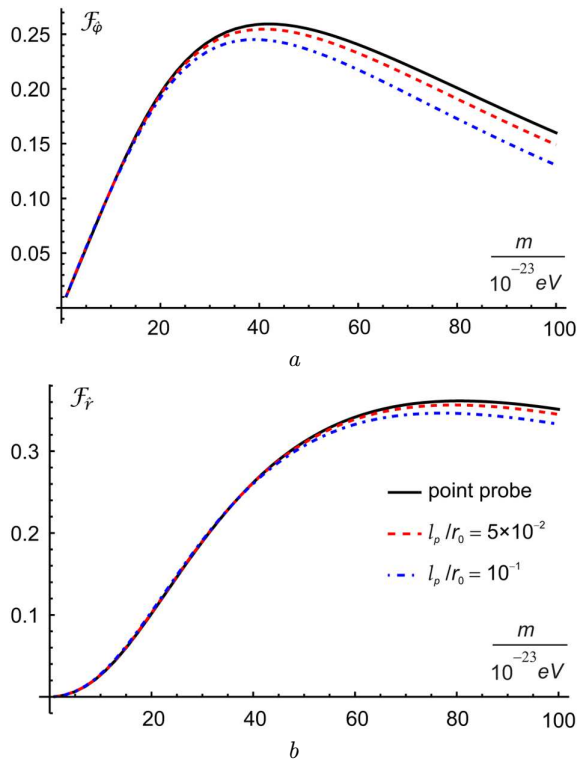


Рис. 2. Тангенціальна (а) й радіальна (б) компоненти безрозмірної сили динамічного тертя $\mathcal{F}$, заданої рівнянням (7), як функції маси частинки темної матерії m в інтервалі $m = 10^{-23}$ – 10^{-21} еВ для фіксованого радіуса орбіти r_0 і точкового зонда (суцільні криві) та сфер Пламмера з різним відношенням l_p/r_0 для типового кулястого скупчення в карликовій галактиці Форнакс

Слід зазначити, що дійсна частина $\Re S_{l, l-1}^{m_l}$ була раніше обчислена й проаналізована чисельно в роботі [24]. Вона задається як головне значення Коші рівняння (9), тобто,

$$\Re S_{l, l-1}^{m_l} = \frac{4m^2 c_s^2 r_0^2}{\hbar^2 M^2} \times \int_0^{+\infty} \frac{x dx \rho_{P1}^2(x l_p/r_0) j_\ell(x) j_{\ell-1}(x)}{x^4 + \frac{4m^2 c_s^2 r_0^2}{\hbar^2} x^2 - 4m_l^2 \frac{m^2 \Omega^2 r_0^4}{\hbar^2}}. \quad (47)$$

Ми перевірили чисельно, що рівняння (42) і (47) дають ідентичні результати, тобто вони представляють одну й ту саму величину в різних формах. Зрештою, можна легко перевірити, що дійсна частина $\Re S_{l, l-1}^{m_l}$ у граничному випадку $l_p \rightarrow 0$ збігається з дійсною частиною для точкового зонда, знайденою в роботі [19].

Використовуючи отримані аналітичні формули для сили динамічного тертя, у наступному розділі ми проаналізуємо залежність сили динамічного тертя від маси бозонної частинки m .

4. Залежність сили динамічного тертя від маси бозонної частинки

Радіальна та тангенціальна складові безрозмірної сили динамічного тертя $\mathcal{F}$ (див. рівняння (7)), що діє на сферу Пламмера, яка рухається по колу, були визначені чисельно в роботі [24] та проілюстровані там як функції числа Маха M та безрозмірного радіуса орбіти $a = m c_s r_0 / \hbar$ для різних значень l_p/r_0 . Число Маха визначається як v/c_s , де v – абсолютне значення швидкості зонда в НЛТМ, а c_s – це адабатична швидкість звуку надплинної рідини ТМ (див. деталі в роботі [27]).

Оскільки маса частинки ТМ m не фіксована в моделі НЛТМ, на рис. 2 зображено залежності безрозмірної сили динамічного тертя від параметра маси m в інтервалі $m = 10^{-23}$ – 10^{-21} еВ для типового кулястого скупчення в карликовій галактиці Форнакс [13] з орбітальним радіусом $r_0 = 668$ пк та густиною темної матерії на цьому радіусі $\rho_{DM} = 2 \cdot 10^7 \text{ M}_\odot/\text{кпк}^3$.

Як бачимо, залежності як радіальної, так і тангенціальної складових не є монотонними. Сила динамічного тертя зростає зі збільшенням m , досягає максимуму, а потім зменшується. Хоча обидві складові слабо залежать від m коли $m \gtrsim 2 \cdot 10^{-22}$ еВ, вони помітно зменшуються, коли

m прямує до 10^{-23} еВ. Очевидно, що сила динамічного тертя для сфери Пламмера сильніше відрізняється від сили динамічного тертя для точкового зонда тієї ж маси для більших значень відношення l_p/r_0 та маси m .

5. Висновки

В статті досліджена сила динамічного тертя, що діє на просторово протяжний зонд (кулясті скупчення й карликові галактики), що рухається в галактичній надлегкій темній матерії в стані конденсату Бозе–Айнштайна. Ці об'єкти часто моделюються як сфери Пламмера. Динамічна сила тертя для сфери Пламмера, що рухається в надлегкій темній матерії, була раніше розглянута в роботі [24]. Чисельно досліджуючи радіальну й тангенціальну складові сили динамічного тертя, було виявлено, що ця сила для сфери Пламмера відхиляється від сили для точкового зонда тієї ж маси у випадку достатньо великого значення відношення радіуса сфери Пламмера до її орбітального радіуса, а також для великих значень числа Маха. Наше дослідження підтвердило актуальність ефектів скінченного розміру для сили динамічного тертя у випадку кулястих скупчень та карликових галактик.

Радіальна складова сили динамічного тертя була задана в роботі [24] як головне значення Коші інтеграла за імпульсом і була обчислена лише чисельно. У цій роботі, інтегруючи за імпульсом, ми визначили радіальну складову сили динамічного тертя у тій самій формі, наявній в літературі, що й для точкового зонда [19]. На рис. 2 зображено залежності тангенціальної та радіальної складових безрозмірної сили динамічного тертя від маси бозонної частинки m в інтервалі $m = 10^{-23}$ – 10^{-21} еВ для типового кулястого скупчення в карликовій галактиці Форнакс. Виявлено, що залежності як радіальної, так і тангенціальної складових не є монотонними. Крім того, сила динамічного тертя для сфери Пламмера сильніше відрізняється від сили тертя для точкового зонда для більших значень відношення l_p/r_0 та маси m .

Ми перевірили, що наші аналітичні вирази для радіальної та тангенціальної складових сили динамічного тертя відтворюють у граничному випадку нульового радіуса сфери Пламмера ($l_p \rightarrow 0$) відповідні вирази, отримані в літературі [19]. Порівняння наших чисельних результатів з результатами

роботи [24] показує їх повну взаємну відповідність. Оскільки вирази для динамічного тертя, що діє на тіло скінченного розміру, є досить складними, а їх розрахунок вимагає застосування числових методів і великої кількості машинного часу, ми вважаємо, що аналітичні вирази для сили динамічного тертя, отримані в цій статті, можуть бути корисними для практичних розрахунків. Зокрема, їх можна використовувати в майбутніх дослідженнях для покращення нашого розуміння впливу НЛТМ на орбітальну динаміку протяжних астрофізичних систем.

Ми також хотіли б зазначити, що, на відміну від карликових галактик, кулясті скупчення в Чумацькому Шляху зазвичай розташовані на відстанях, більших за центральне ядро з радіусом приблизно рівним 1 кпк, у стані конденсату Бозе–Айнштайна надлегких бозонів. На таких відстанях квантова інтерференція хвиль призводить до стохастично розподіленої грануляції на масштабі де Бройля [28–31], яка феноменологічно описується дисипативним доданком у рівнянні Гросса–Пітаєвського [32], і ми плануємо вивчити її роль у майбутньому.

Робота Е.В. Горбар, Т.В. Горкавенко, В.М. Горкавенко та А.О. Запорожченко була частково підтримана Міністерством освіти і науки України (проект 25БФ051-01 “Пошук темної матерії та частинок за межами Стандартної Моделі”). Автори вдячні О.І. Якименку за плідні обговорення та корисні коментарі.

ДОДАТОК

Лишок

$$\Delta(u) = \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k \sin(l_p u k)}{\Pi(k^2)} y_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0) \right) \quad (\text{Д.1})$$

не зміниться, якщо замінити $y_l y_{l-1}$ на $j_l j_{l-1} + y_l y_{l-1}$, тобто,

$$\Delta(u) = \operatorname{res}_{k=0} \left(\frac{k \sin(l_p u k)}{\Pi(k^2)} (j_l(kr_0) j_{l-1}(kr_0) + y_l(kr_0) y_{l-1}(kr_0)) \right), \quad (\text{Д.2})$$

оскільки $j_l(kr_0) j_{l-1}(kr_0)$ є регулярною функцією в точці $k = 0$. Введемо функцію

$$Q_l(x) = j_l(x) j_{l-1}(x) + y_l(x) y_{l-1}(x). \quad (\text{Д.3})$$

На відміну від $y_l(x) y_{l-1}(x)$ ця функція є поліномом від обернених степенів x . З визначень

$$j_l(x) = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}, \quad (\text{Д.4})$$

$$y_l(x) = -x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \quad (\text{Д.5})$$

впливає, що

$$j_l(x) = -j'_{l-1}(x) + (l-1) \frac{j_{l-1}(x)}{x} \quad (\text{Д.6})$$

та аналогічне співвідношення для $y_l(x)$. Отже,

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (j_{l-1}^2(x) + y_{l-1}^2(x)) + \\ &+ \frac{l-1}{x} (j_{l-1}^2(x) + y_{l-1}^2(x)) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} + \frac{l-1}{x} \right) (j_{l-1}^2(x) + y_{l-1}^2(x)). \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

Далі, для $j_l^2(x) + y_l^2(x)$ маємо [33]

$$j_l^2(x) + y_l^2(x) = \sum_{n=0}^l \frac{(2n)!(n+l)!}{4^n(n!)^2(l-n)!} \frac{1}{x^{2n+2}}. \quad (\text{Д.8})$$

Тоді, використовуючи це співвідношення, знаходимо

$$Q_l(x) = \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(2n)!(n+l)!}{4^n(n!)^2(l-n-1)!} \frac{1}{x^{2n+3}}. \quad (\text{Д.9})$$

З огляду на розклади Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Pi(k^2)} &= \frac{1}{(k^2 + \kappa^2)(k^2 - k_3^2)} = \\ &= \frac{1}{\kappa^2 + k_3^2} \left(\frac{1}{k^2 - k_3^2} - \frac{1}{k^2 + \kappa^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 + k_3^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k_3^{2m+2}} + \frac{(-1)^m}{\kappa^{2m+2}} \right) k^{2m} \end{aligned} \quad (\text{Д.10})$$

та

$$k \sin(l_p u k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (l_p u)^{2s+1}}{(2s+1)!} k^{2s+2}, \quad (\text{Д.11})$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= -\frac{1}{\kappa^2 + k_3^2} \operatorname{res}_{k=0} \left(\sum_{n=0}^{l-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2n)!(n+l)!}{4^n(n!)^2(l-n-1)!} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{k_3^{2m+2}} + \frac{(-1)^m}{\kappa^{2m+2}} \right) \frac{(-1)^s (l_p u)^{2s+1}}{r_0^{2n+3} (2s+1)!} \frac{1}{k^{2(n-m-s)+1}} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д.12})$$

Вибравши доданки, які є простими полюсами за змінною k , та обчисливши залишок, ми отримуємо вираз для $\Delta(u)$ у вигляді рівняння (41).

1. S. Chandrasekhar. Dynamical friction. I. General considerations: The coefficient of dynamical friction. *Astrophys. J.* **97**, 255 (1943).
2. H. Bondi, F. Hoyle. On the mechanism of accretion by stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **104**, 273 (1944).
3. V. Dokuchaev. Emission of magnetoacoustic waves in the motion of stars in cosmic space. *Sov. Astron.* **8**, 23 (1964).
4. M. Ruderman, E. Spiegel. Galactic wakes. *Astrophys. J.* **165**, 1 (1971).
5. Y. Rephaeli, E. Salpeter, Flow past a massive object and the gravitational drag. *Astrophys. J.* **240**, 20 (1980).

6. E.C. Ostriker, Dynamical friction in a gaseous medium. *Astrophys. J.* **513**, 252 (1999).
7. P.-H. Chavanis. Self-gravitating Bose-Einstein condensates. *Fundam. Theor. Phys.* **178**, 151 (2015).
8. J.C. Niemeyer. Small-scale structure of fuzzy and axion-like dark matter. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **113**, 103787 (2020).
9. L. Hui. Wave dark matter. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **59**, 247 (2021).
10. E.G.M. Ferreira. Ultra-light dark matter. *Astron. Astrophys. Rev.* **29**, 7 (2021).
11. P. Salucci. The distribution of dark matter in galaxies. *Astron. Astrophys. Rev.* **27**, 2 (2019).
12. L. Hui, J.P. Ostriker, S. Tremaine, E. Witten, Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D* **95**, 043541 (2017).
13. L. Lancaster, C. Giovanetti, P. Mocz, Y. Kahn, M. Lisanti, D.N. Spergel. Dynamical friction in a fuzzy dark matter universe. *J. Cosmolog. Astropart. Phys.* **01**, 001 (2020).
14. Y. Wang, R. Easther. Dynamical friction from ultralight dark matter. *Phys. Rev. D* **105**, 063523 (2022).
15. R. Boey, Y. Wang, E. Kendall, R. Easther. Dynamical friction and black holes in ultralight dark matter solitons. *Phys. Rev. D* **109**, 103526 (2024).
16. A. Boudon, P. Brax, P. Valageas. Subsonic accretion and dynamical friction for a black hole moving through a self-interacting scalar dark matter cloud. *Phys. Rev. D* **106**, 043507 (2022).
17. S.T.H. Hartman, H.A. Winther, D.F. Mota. Dynamical friction in Bose-Einstein condensed self-interacting dark matter at finite temperatures, and the Fornax dwarf spheroidal. *Astron. Astrophys.* **647**, A70 (2021).
18. R. Buehler, V. Desjacques. Dynamical friction in fuzzy dark matter: Circular orbits. *Phys. Rev. D* **107**, 023516 (2023).
19. L. Berezhiani, G. Cintia, V. De Luca, J. Khoury. Dynamical friction in dark matter superfluids: The evolution of black hole binaries. *J. Cosmolog. Astropart. Phys.* **06**, 024 (2024).
20. S. Tremaine, J. Ostriker, S. Spitzer. The formation of the nuclei of galaxies. I. M31. *Astrophys. J.* **196**, 407 (1975).
21. H. Plummer. On the problem of distribution in globular star clusters. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **71**, 460 (1911).
22. N. Glennon, N. Musoke, E.O. Nadler, C. Prescod-Weinstein, R.H. Wechsler. Dynamical friction in self-interacting ultralight dark matter. *Phys. Rev. D* **109**, 063501 (2024).
23. D. Blas. Dark matter properties from the Fornax globular cluster timing: dynamical friction and cored profiles. In: *16th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories* (2022), pp. 2089–2100; arXiv:2205.00289 [hep-ph].
24. V.M. Gorkavenko, A.I. Yakimenko, A.O. Zaporozhchenko, E.V. Gorbar. Dynamical friction in ultralight dark matter: Plummer sphere perspective. *Physica Scripta* **100**, 075039 (2025).

25. I. Gradshteyn, I. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2014).
26. V. Desjacques, A. Nusser, R. Buehler. Analytic solution to the dynamical friction acting on circularly moving perturbers. *Astrophys. J.* **928**, 64 (2022).
27. V.M. Gorkavenko, O.V. Barabash, T.V. Gorkavenko, O.M. Teslyk, A.O. Zaporozhchenko, J. Jia, A.I. Yakimenko, E.V. Gorbar. Dynamical friction in rotating ultralight dark matter galactic cores. *Class. Quant. Grav.* **41**, 235013 (2024).
28. H.-Y. Schive, T. Chiueh, T. Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave. *Nature Phys.* **10**, 496 (2014).
29. B. Schwabe, J.C. Niemeyer, J.F. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *Phys. Rev. D* **94**, 043513 (2016).
30. P. Mocz, M. Vogelsberger, V.H. Robles, J. Zavala, M. Boylan-Kolchin, A. Fialkov, L. Hernquist. Galaxy formation with BEXTM – I. Turbulence and relaxation of idealized haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **471**, 4559 (2017).
31. J. Veltmaat, J.C. Niemeyer, B. Schwabe. Formation and structure of ultralight bosonic dark matter halos. *Phys. Rev. D* **98**, 043509 (2018).
32. P.-H. Chavanis. Predictive model of BEC dark matter halos with a solitonic core and an isothermal atmosphere. *Phys. Rev. D* **100**, 083022 (2019).
33. W.J. Frank, W.L. Daniel, F.B. Ronald, W.C. Charles. *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge University Press, 2010).

Одержано 25.04.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

*O.V. Barabash, T.V. Gorkavenko,
V.M. Gorkavenko, O.M. Teslyk, N.S. Yakovenko,
A.O. Zaporozhchenko, E.V. Gorbar*

ANALYTIC CALCULATION OF DYNAMICAL FRICTION FOR PLUMMER SPHERE IN ULTRALIGHT DARK MATTER

The dynamical friction force acting on a spatially extended probe (globular clusters and dwarf galaxies) moving in the environment of ultralight bosonic dark matter in the state of the Bose–Einstein condensate is determined. Modelling the probe as a r sphere of radius l_p , the radial and tangential components of the dynamic friction force are found in an analytic form, which reduces in the limit $l_p \rightarrow 0$ to the corresponding analytic expressions obtained in the literature in the case of a point probe. The dependence of dynamical friction force on boson particle mass was analyzed and found to be non-monotonous in the interval $10^{-23} \div 10^{-21}$ eV.

Key words: ultralight bosonic dark matter, Plummer sphere, dynamical friction force, globular clusters, dwarf galaxies.