

В.Є. КУЗЬМИЧОВ, В.В. КУЗЬМИЧОВ

Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова, НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143; e-mail: vkuzmichev@bitr.kyiv.ua)

МІНІСУПЕРПРОСТОРОВА КВАНТОВА КОСМОЛОГІЯ У ФОРМАЛІЗМІ МАДЕЛУНГА–БОМА

УДК 531.51

Проведено аналогію між нерелятивістською квантовою механікою у формулюванні Маделунга та квантовою геометродинамікою для випадку максимально симетричного простору. Отримано рівняння, еквівалентні рівнянню неперервності та гідродинамічному рівнянню Ейлера, що описують еволюцію швидкості, введеної для випадку гіпотетичного потоку рідини, що характеризує космологічну систему. Показано, що ідеальна природа рідини порушується квантовим потенціалом Бома. Квантовий потенціал обчислено в напівкласичному наближенні для різних сил, що діють у системі, як у стандартній квантовій механіці, так і в мінісуперпросторовій моделі квантової геометродинаміки. Отримано явні залежності космічного масштабного фактора від конформного часу, які враховують квантову складову, для порожнього простору з просторовою кривизною та для просторово плоского Всесвіту з пилом і випромінюванням.

Ключові слова: квантова теорія, гідродинаміка, космологія, геометродинаміка.

1. Вступ

Стаття Маделунга [1] про квантову теорію в гідродинамічній формі може розглядатися як одна з найбільш основоположних у царині квантової теорії. Вона стала відправною точкою для багатьох досліджень зв'язку між новою квантовою теорією, заснованою на рівнянні Шредингера [2], і добре встановленими класичними теоріями механіки та електродинаміки, а також для спроб інтерпретації самої квантової теорії. В 1950-х роках відбувалася інтенсивна дискусія щодо цього питання та необхідності пошуку послідовного формулювання квантової теорії [3–10]. Формалізм Маделунга зіграв важливу роль у впровадженні ідеї ансамблю класичних траєкторій у подальшому розвитку квантової

механіки. Зокрема, ідея Дірака [11], реалізована у Фейнмановому формулюванні квантової механіки через інтеграли вздовж траєкторій, може бути розпізнана в гідродинамічному підході Маделунга.

В останні два десятиліття відновився інтерес до представлення хвильових функцій у формі Маделунга–Бома [12]. Елементи підходу Маделунга можна побачити в квантовому формалізмі Гамільтона–Якобі [13, 14], який забезпечує альтернативний підхід до нерелятивістської квантової механіки та може бути використаний, зокрема, в обчислювальному методі для одновимірних задач розсіювання [15, 16]. Тривимірне квантове рівняння Гамільтона–Якобі у випадку розділених змінних описує фізичні стани, які не визначаються хвильовою функцією Шредингера [17, 18].

Вважається, що класична механіка походить від квантової механіки як її граничний випадок [19]. Питання правильного переходу від квантового опису до класичного є актуальним і залишається відкритим. Вирішення цього питання може здатися більш здійсненним у контексті підходу

Цитування: Кузьмичов В.Є., Кузьмичов В.В. Мінісуперпросторова квантова космологія у формалізмі Маделунга–Бома. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 4, 215 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 2071-0194. Укр. фіз. журн. 2025. Т. 70, № 4

Маделунга–Бома [20]. З іншого боку, такий підхід дозволяє описати взаємодію класичної та квантової систем, коли класичний рух не розглядається як наближення квантової механіки [21].

Оскільки рівняння Маделунга перетворюють залежне від часу нерелятивістське рівняння Шредінгера на гідродинамічні рівняння неklasичної віртуальної ейлерової рідини [22], можна проаналізувати такі властивості рідини Маделунга, як ентропія [23], і встановити зв'язок між інформацією Фішера та термодинамічно-подібною внутрішньою енергією цієї рідини [24].

Точний математичний зв'язок між рівняннями Маделунга та рівнянням Шредінгера все ще залишається предметом дебатів [25, 26]. Проголошувалося, що послідовна математична теорія для цієї системи рівнянь не може бути розроблена без накладення додаткової умови квантування [5, 27, 28]. Деякі підходи стверджують, що рівняння Маделунга є фізично більш фундаментальними, ніж рівняння Шредінгера. Однак, якщо розглядати рівняння Маделунга як “розгортання” рівняння Шредінгера до форми, в якій явно виділено внесок квантових ефектів (не враховуючи зворотну процедуру відновлення рівняння Шредінгера), то деякі питання про статус рівнянь Маделунга відпадають. Пропорційність квантових ефектів до \hbar^2 дозволяє розвинути метод Вентцеля–Крамерса–Бріллоена (ВКБ).

Як вже згадувалося вище, підхід Маделунга–Бома залишається орієнтиром для багатьох сучасних досліджень квантової теорії, зокрема щодо її зв'язку з класичною теорією. Метою пропонованої статті не є повний огляд усіх існуючих досліджень у цій галузі. Стаття складається з двох частин: перша стосується квантової механіки, друга – квантової геометродинаміки. Короткий опис підходу Маделунга–Бома, поданий у розділі 2, зроблено для представлення деяких його ключових моментів з метою подальшого застосування в квантовій геометродинаміці. Щоб з'ясувати конкретні залежності квантового потенціалу Бома від просторової змінної, розглянуто кілька конкретних випадків потенціалів, в яких рухається квантова частинка. Вивчаючи властивості потенціалу Бома, ми орієнтуємося на напівкласичне наближення щодо \hbar^2 . Тоді потенціал Бома можна обчислити безпосередньо з потенційного поля, в якому рухається частинка. У розділі 3 ми розгляда-

ємо однорідну та ізотропну квантову космологічну систему (Всесвіт). У цьому випадку ми можемо провести прямі паралелі з квантовою теорією в розмірності $(1 + 1)$. Рівняння квантової геометродинаміки для системи, заповненої однорідним скалярним полем і ідеальною рідиною, зводяться до системи рівнянь гідродинамічної форми. У напівкласичному наближенні розраховані аналоги квантового потенціалу Бома для випадків домінування випромінювання, домінування матерії, для космологічної моделі з просторово-пласкою геометрією, заповненою випромінюванням і пилом, і для порожнього простору з просторовою кривизною. Тут вивчається вплив квантового потенціалу на розширення Всесвіту. В розділі 4 обговорюються результати, отримані в попередніх розділах.

2. Підхід Маделунга–Бома в розмірності $(1 + 1)$

2.1. Основні рівняння

Причина вибору розмірності $(1 + 1)$ для розгляду викликана спостереженням, що квантова геометродинаміка для максимально симетричного простору-часу зводиться до проблеми в розмірності $(1 + 1)$. Це дозволяє нам провести паралелі між квантовою механікою та квантовою космологією безпосередньо.

У нерелятивістській квантовій теорії основні рівняння [1, 2]

$$\Psi = \psi e^{-\frac{i}{\hbar} W t}, \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi + [V(x) - W] \psi = 0 \quad (2)$$

описують рух частинки з масою m вздовж осі x під дією потенціалу $V(x)$. Тут $\psi = \psi(x)$, $\Psi = \Psi(x, t)$, t – час, а W – повна енергія. Оскільки фаза Ψ залежить від t лінійно, рівняння (1) і (2) можна переписати у вигляді одного рівняння

$$i\hbar \partial_t \Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right] \Psi. \quad (3)$$

Це рівняння відоме як залежне від часу рівняння Шредінгера. Ми утримаємося від узагальнення рівняння (3) на випадок, коли потенціальна функція залежить від часу, оскільки тоді вона не має розв'язку у формі (1).

Рівняння неперервності випливає з рівняння (3) і має вигляд

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0, \quad (4)$$

де $\rho = |\Psi|^2$ – це густина ймовірності знаходження частинки в деякій точці простору, а

$$J = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) \quad (5)$$

– це густина струму ймовірності частинки в точці x в момент часу t .

Ми шукатимемо розв’язок рівняння (3) у полярній формі

$$\Psi(x, t) = A(x, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)}, \quad (6)$$

де амплітуда A і фаза S є дійсними функціями своїх аргументів. Підставляючи рівняння (6) у рівняння (3), отримуємо такі два рівняння [1]:

$$m \partial_t A^2 + \partial_x (A^2 \partial_x S) = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t S + \frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + V = Q, \quad (8)$$

де

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 A}{A} \quad (9)$$

– це квантовий потенціал Бома¹ [3]. Потенціал Q можна розглядати як додаткове джерело, породжене змінами амплітуди A в просторі. У формальній границі $\hbar^2 \rightarrow 0$ ми маємо $Q = 0$, і рівняння (8) у цій границі нагадує рівняння Гамільтона–Якобі, якщо фазу S розглядати як класичну дію [11, 29]. За аналогією з класичною механікою, ми визначимо швидкість u виразом

$$u = \frac{\partial_x S}{m}. \quad (10)$$

Підстановка рівняння (6) у рівняння (5) дає $J = \rho u$, а рівняння (4) перетворюється на рівняння неперервності, як у гідродинаміці,

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0. \quad (11)$$

¹ Цей потенціал зазвичай визначається зі знаком мінус. Ми залишаємо знак плюс, як він з’являється при виведенні рівняння (8).

Це рівняння – ні що інше як рівняння (7) у нових позначеннях. Воно описує закон збереження для рідини з густиною ρ і струмом ρu .

Рівняння (8) можна інтерпретувати як квантове рівняння Гамільтона–Якобі, хоча були дискусії [6, 7] щодо його значення, які тривають й досі [25, 26]. З цього рівняння, враховуючи рівняння (9), випливає квантовий аналог рівняння Ейлера, який визначає швидкість u ,

$$(\partial_t + u \partial_x) m u = -\partial_x (V - Q). \quad (12)$$

Рівняння (11) і (12) описують рух рідини та включають додаткову силу $\frac{1}{m} \partial_x Q$, спричинену квантовими ефектами, що містяться в оригінальному рівнянні Шредінгера. Якщо покласти $\hbar = 0$ і інтерпретувати ρ як густину речовини, ці рівняння перетворюються на рівняння класичної гідродинаміки, де величина u – це швидкість рідини в будь-якій даній точці x простору в момент часу t , без урахування того, яка частинка займає положення x . Коли $\hbar \neq 0$, можна говорити лише про швидкість u гіпотетичної рідини з густиною ρ , де ρ і u є суто квантовими характеристиками, тож їх зв’язок з будь-якою фізичною субстанцією залишається під питанням. У цьому випадку гіпотетична рідина не є ідеальною, оскільки додаткова сила квантової природи створює нелінійні ефекти в поведінці швидкості u .

2.2. Стаціонарні стани

Для потенціалу $V(x)$, що не залежить від часу, гамільтоніан у правій частині рівняння (3) не залежить від часу явно. У цьому випадку фазу в рівнянні (6) можна записати у такому вигляді: $S(x, t) = S_0(x) - Wt$. Тоді хвильова функція (1) описує окремий випадок так званого стаціонарного стану частинки з енергією W у зовнішньому полі $V(x)$.

Розв’язок рівняння (2) для стаціонарного стану можна записати у формі

$$\psi(x) = A(x) e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)}, \quad (13)$$

де $A(x)$ і $S_0(x)$ є дійсними функціями, не залежними від часу. Тоді

$$\partial_t A = 0 \quad \text{та} \quad \partial_t S = -W. \quad (14)$$

Швидкість (10) для стаціонарного потоку гіпотетичної рідини дорівнює

$$u = \frac{\partial_x S_0}{m}. \quad (15)$$

Підставляючи рівняння (1) у (5) і враховуючи рівняння (13) та (14), знаходимо, що густина струму ймовірності $J = \rho u = \text{const}$. Для комплекснозначних хвильових функцій, амплітуду в рівнянні (13) можна записати у вигляді

$$A = \frac{\text{const}}{\sqrt{u}}. \quad (16)$$

Рівняння (8) зводиться до нелінійного рівняння для швидкості u ,

$$\frac{mu^2}{2} + V - Q = W, \quad (17)$$

де

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\partial_x u}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 u}{u} \right]. \quad (18)$$

Гradient Q дорівнює

$$\partial_x Q = \frac{\hbar^2}{2m} \left[2 \frac{\partial_x u \partial_x^2 u}{u^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_x u}{u} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial_x^3 u}{u} \right]. \quad (19)$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, комплекснозначний стан $\psi(x)$ є станом неперервного спектра з заданою енергією, як, наприклад, при розсіюванні частинки на мішені. Часто використовується так зване наближення плоскої хвилі, а саме,

$$\psi(x) = C e^{\frac{i}{\hbar} p x}, \quad (20)$$

де $p = \hbar k$ – це імпульс, а C – коефіцієнт нормування. Ця хвильова функція нормується або умовою $J = u$, так що $C = 1$, або умовою $J = 1$, для якої $C = 1/\sqrt{u}$, як у рівнянні (16) (нормування на дельта-функцію [29]).

2.3. Напівкласичний потенціал Бома

З міркувань розмірності випливає, що

$$Q(x) = \frac{\hbar^2}{2m x^2} \lambda(x), \quad (21)$$

де $\lambda(x)$ – безрозмірна функція зв'язку, залежна від x . Як ми побачимо пізніше, функції $Q(x)$ або

$\lambda(x)$ можуть прямувати до відповідних сталих значень при певних умовах. Обчислювати ці функції будемо в напівкласичному наближенні. Оскільки $Q \sim \hbar^2$, то в цьому наближенні квантовим доданком у рівнянні (17) можна знехтувати, і ми можемо покласти $u = \sqrt{\frac{2}{m}(W - V)}$. Це дозволяє нам обчислити квантовий потенціал (18) явно:

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{5}{16} \left(\frac{\partial_x V}{W - V} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial_x^2 V}{W - V} \right]. \quad (22)$$

Загалом кажучи, якщо розв'язок рівняння (3) відомий у явному вигляді, то квантовий потенціал Бома можна відновити з рівняння (9). Але тоді відповідь матиме лише інформативний характер, оскільки квантова проблема вважається вже вирішеною, а рівняння (8) зводиться до тотожності. Застосування того факту, що квантовий потенціал є пропорційним до \hbar^2 та, згідно з рівнянням (8), окрім нього є інші доданки, у яких відсутня стала Планка, дозволяє нам знайти потенціал Бома, використовуючи лише теорію збурень і явну форму потенціалу $V(x)$.

Розглянемо окремі випадки потенціалу $V(x)$.

2.3.1. Вільне падіння частинки

Для задачі про вільне падіння частинки з масою m на земну поверхню маємо стандартний потенціал гравітації $V(x) = mgx$, де x – це висота над землею. Тоді квантовий потенціал (22) набуває вигляду

$$Q = \frac{5}{32} \frac{\hbar^2 m g^2}{(W - mgx)^2}. \quad (23)$$

Це рівняння можна звести до рівняння (21) з

$$\lambda(x) = \frac{5}{16} \left(\frac{mgx}{W - mgx} \right)^2. \quad (24)$$

Якщо $W \gg mgx$, то маємо $\lambda(x) = \frac{5}{16} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2$, де $x_0 \equiv \frac{W}{mg}$, а квантовий потенціал Q не залежить від $x < x_0$.

2.3.2. Частинка в статичній рідині

Якщо частинка занурена в статичну рідину, на неї діє виштовхувальна сила в напрямку, протилежному силі гравітації, так що загальний потенціал становить $V(x) = -(m - \rho_f V_d)gx$, де x – це відстань

до поверхні рідини, ρ_f – густина рідини, а V_d – переміщений об’єм рідини. Тоді функція зв’язку в рівнянні (21) стає рівною

$$\lambda(x) = \frac{5}{16} \left[\frac{(m - \rho_f V_d)gx}{W + (m - \rho_f V_d)gx} \right]^2. \quad (25)$$

Для частинки, що рухається з енергією $W \ll (m - \rho_f V_d)gx$, константа $\lambda = \frac{5}{16}$ визначає квантовий потенціал (21); отже він не залежить від гравітаційного поля g і властивостей рідини. У протилежній границі, $W \gg (m - \rho_f V_d)gx$, ситуація подібна до тієї, що обговорювалася в підрозділі 2.3.1, так що квантовий потенціал Q є постійним для малих значень x .

2.3.3. Заряджена частинка в прискорюючому електричному полі

Розглядаючи одновимірний рух частинки з масою m і зарядом $-e$ у прискорювальному електричному полі \mathcal{E} , ми маємо $V(x) = -e\mathcal{E}x$, а квантовий потенціал дорівнює

$$Q = \frac{5}{32} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{e\mathcal{E}}{W + e\mathcal{E}x} \right)^2. \quad (26)$$

У низькоенергетичній границі, $W \ll e\mathcal{E}x$, квантовий потенціал (21) визначається тим самим значенням $\lambda = \frac{5}{16}$, що й у підрозділі 2.3.2. Тут квантовий потенціал Q не залежить від електричного поля \mathcal{E} .

2.3.4. Степеневий потенціал

Нехай $V(x) = \Omega_n x^n$ (у цьому виразі немає підсумовування по n), де константа зв’язку Ω_n має розмірність “енергія/довжина ^{n} ”. Тоді квантовий потенціал набуває вигляду (21), де

$$\lambda(x) = \frac{\Omega_n x^n}{W - \Omega_n x^n} \left[\frac{5}{16} n^2 \frac{\Omega_n x^n}{W - \Omega_n x^n} + \frac{1}{4} n(n-1) \right]. \quad (27)$$

Слід зазначити, що при низьких енергіях, параметри Ω_n потенціалу $V(x)$ не впливають на квантовий потенціал Q . Дійсно, для руху частинки з енергією $W \ll \Omega_n x^n$, квантовий потенціал набуває вигляду (21), де

$$\lambda = \frac{1}{4} n \left(\frac{1}{4} n + 1 \right). \quad (28)$$

У зворотній границі, $W \gg \Omega_n x^n$, функція зв’язку $\lambda(x)$ прямує до

$$\lambda(x) = \frac{5}{16} n^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{2n} + \frac{1}{4} n(n-1) \left(\frac{x}{x_0} \right)^n, \quad (29)$$

де $x_0 \equiv (W/\Omega_n)^{1/n}$.

2.4. Задачі, що мають точний розв’язок

Існує клас задач, для яких потенціал Бома можна точно обчислити в явному вигляді. Якщо ми обмежимося розглядом лише дійсних хвильових функцій, то з рівняння (5) випливає, що густина струму ймовірності $J = 0$. У такому випадку, із загального виразу $J = \rho u$ знаходимо, що $u = 0$ для таких систем, оскільки $\rho = A^2 \neq 0$. Крім того, з рівняння (17) ми маємо просте рівняння для Q ,

$$Q = V - W, \quad (30)$$

та рівняння Шредінгера для дійсної амплітуди A ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 A(x) + [V(x) - W] A(x) = 0, \quad (31)$$

яке випливає з визначення (9).

Розглянемо кілька конкретних прикладів.

2.4.1. Гармонічний осцилятор

Для гармонічного осцилятора з кутовою частотою ω потенціал становить $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, а власне значення енергії дорівнює $W = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$, де n – будь-яке натуральне число. Потенціал Бома дорівнює

$$Q(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (32)$$

Рівняння (31) для $A(x)$ зводиться до рівняння Шредінгера для хвильової функції гармонічного осцилятора. Цікаво відзначити, що для основного стану ($n = 0$) нульова енергія коливальє є різницею між потенціалом V і квантовим потенціалом Бома,

$$\frac{1}{2} \hbar \omega = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - Q_{n=0}(x). \quad (33)$$

2.4.2. Прямокутна потенційна яма

Нехай прямокутна потенційна яма має вигляд $V(x) = -V_0$ при $|x| < R$, і $V(x) = 0$ при $|x| > R$, де $V_0 > 0$, а $2R$ – це ширина ями. Усередині

ями існують зв'язані стани частинки з енергією $W = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$, де $\kappa > 0$. Потенціал Бома дорівнює: при $|x| < R$,

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m} (\kappa^2 - k_0^2), \quad (34)$$

де $k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$; і при $|x| > R$,

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2. \quad (35)$$

Амплітуда $A(x)$ описується рівнянням Шредінгера для прямокутної потенційної ями.

3. Квантова геометродинаміка в розмірності (1 + 1)

3.1. Основні рівняння

Модель мінісуперпростору зі скінченим числом ступенів вільності може забезпечити розумну основу для вирішення проблем квантової гравітації. У цій статті ми розглядаємо однорідну та ізотропну квантову космологічну систему (далі – Всесвіт), геометрія якої визначається лінійним елементом Робертсона–Уокера з космічним масштабним фактором a . Вважається, що такий Всесвіт спочатку заповнений однорідним матеріальним полем ϕ і референтною ідеальною рідиною. Дотримуючись схеми канонічного квантування Дірака, основні рівняння, що описують такий квантовий всесвіт, в одиницях Планка можна звести до форми [30–34]

$$(-i\partial_T - E)\Psi = 0, \quad (36)$$

$$(-i\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aH_\phi - E)\Psi = 0, \quad (37)$$

де $\Psi = \Psi(a, \phi; T)$ – вектор стану, T – перемасштабований конформний час, пов'язаний із власним часом t через диференціальне рівняння $dt = adT$, $dT = N d\eta$, де N – це функція затримки, вибір якої є довільним [35], а η – це “дуговий час”. Параметр $\kappa = +1, 0, -1$ є параметром кривини, а H_ϕ – це гамільтоніан матеріального поля ϕ . Наприклад, для однорідного скалярного поля маємо

$$H_\phi = \frac{a^3}{2} \rho_\phi, \quad \rho_\phi = -\frac{2}{a^6} \partial_\phi^2 + V(\phi), \quad (38)$$

де $\frac{a^3}{2} = \mathcal{V}$ – це власний об'єм, ρ_ϕ – густина енергії, а $V(\phi)$ – потенціал. Далі всі величини вважатимуться безрозмірними.

Параметр E визначається густиною енергії релятивістської матерії (випромінювання) ρ_γ відповідно до рівняння $E = a^4 \rho_\gamma$ і визначає матеріальну систему відліку, яка використовується для відстеження часу T [30, 31, 36, 37]. Зауважимо, що в стандартних фізичних одиницях, E і T мають такі розмірності: $[E] = \text{енергія} \times \text{довжина}$, $[T] = \text{радiан}$.

Щодо фізичного змісту рівнянь (36) і (37), то перше є рівнянням в'язі, яке забезпечує збереження числа частинок ідеальної рідини, а друге – це рівняння в'язі Гамільтона (аналог рівняння Вілера–ДеВітта).

Використовуючи рівняння (36), рівняння (37) можна переписати як залежне від часу рівняння в розмірності (2 + 1):

$$-i\partial_T \Psi = (-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aH_\phi) \Psi. \quad (39)$$

Введемо повний ортонормований набір функцій $|\Phi_i\rangle$, $\sum_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i| = 1$, $\langle \Phi_i | \Phi_k \rangle = \delta_{ik}$, що діагоналізує гамільтоніан H_ϕ ,

$$\langle \Phi_i | H_\phi | \Phi_k \rangle = M_i(a) \delta_{ik}, \quad (40)$$

де $M_i(a)$ – це маса-енергія матерії у Всесвіті в дискретному та/або неперервному i -му стані, отримана після усереднення H_ϕ відносно поля $|\Phi_i\rangle$ у власному об'ємі \mathcal{V} . У загальному випадку маса-енергія матерії може залежати від a . Коли H_ϕ описує однорідне скалярне поле, матерія перетворюється на баротропну рідину [33].

Розкладаючи вектор Ψ в ряд за функціями $|\Phi_i\rangle$,

$$\Psi = \sum_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i | \Psi \rangle, \quad (41)$$

та підставляючи розклад в рівняння (39), ми переходимо до рівняння в розмірності (1 + 1),

$$-i\partial_T \psi = [-\partial_a^2 + U(a)] \psi, \quad (42)$$

де $\psi = \psi(a, T) \equiv \langle \Phi_i | \Psi \rangle$, а величина

$$U(a) = \kappa a^2 - 2aM(a) \quad (43)$$

відіграє роль потенціалу. Індекс стану матерії i залишиться незмінним, і надалі його можна опустити. Рівняння (42) подібне до рівняння Шредінгера (3), за винятком того, що часова змінна входить у нього з протилежним знаком через специфіку загальної теорії відносності.

Розв'язок рівняння будемо шукати в полярній формі,

$$\psi(a, T) = A(a, T) e^{iS(a, T)}, \quad (44)$$

де амплітуда A і фаза S є дійсними функціями. Тоді рівняння (42) зводиться до двох рівнянь:

$$-\frac{1}{2} \partial_T A^2 + \partial_a (A^2 \partial_a S) = 0, \quad (45)$$

$$-\partial_T S + (\partial_a S)^2 + U = Q, \quad (46)$$

де

$$Q = \frac{\partial_a^2 A}{A} \quad (47)$$

є аналогом квантового потенціалу Бома (9). Його можна розглядати як додаткове джерело, породжене амплітудою хвильової функції.

Можна розглядати пробну частинку, що рухається разом з ідеалізованою однорідною рідиною, яка представляє “розмазану” по Всесвіту матерію. В результаті розширення Всесвіту в цілому частинка набуває швидкості, що відповідає закону Хаббла. Доцільно розглядати космологічну систему (Всесвіт) саму по собі як «частинку» або нескінченно малий об'ємний елемент, який рухається зі швидкістю $v = \frac{da}{dT}$ у мінісуперпросторі. Можна показати [34], що швидкість v пов'язана з похідною фази $\partial_a S$ простим співвідношенням

$$v = -\partial_a S. \quad (48)$$

Тоді рівняння (45) і (46) набувають вигляду гідродинамічних рівнянь

$$\frac{1}{2} \partial_T \rho + \partial_a (\rho v) = 0, \quad (49)$$

$$\left(\frac{1}{2} \partial_T + v \partial_a \right) v = -\frac{1}{2} \partial_a (U - Q), \quad (50)$$

де $\rho = A^2 = |\psi|^2$ – густина ймовірності, а ρv – густина струму ймовірності нескінченно малого елемента об'єму в точці a в момент часу T . Рівняння (49) і (50) є, відповідно, рівнянням неперервності та квантовим аналогом рівняння Ейлера.

Узагальнену силу

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \partial_a (U - Q) \quad (51)$$

можна обчислити явно,

$$\mathcal{F} = -ak + \frac{a^3}{2} (\rho_m - 3p_m) + \frac{1}{2} \partial_a Q, \quad (52)$$

де $\rho_m = \frac{M}{V}$ – це густина енергії речовини, а $p_m = -\frac{dM}{dV}$ – тиск. Ідеальна природа рідини порушується наявністю квантового доданка. Якщо знехтувати цим доданком, рівняння (49) і (50) набувають лише формальної схожості з рівняннями класичної гідродинаміки.

Квантовий доданок можна переписати у “стандартній” формі

$$\frac{1}{2} \partial_a Q = \frac{a^3}{2} (\rho_v - 3p_v), \quad (53)$$

де

$$\rho_v = \frac{Q}{a^4}, \quad p_v = w_v \rho_v, \quad w_v = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{d \ln Q}{d \ln a} \right). \quad (54)$$

Тут w_v – це параметр рівняння стану (РС) для додаткового джерела квантової природи.

3.2. Стаціонарний стан

Підставляючи рівняння (44) у рівняння (36), отримуємо умову для хвильової функції $\psi \neq 0$,

$$\left(-i \frac{\partial_T A}{A} + \partial_T S - E \right) \psi = 0. \quad (55)$$

Це призводить до двох рівнянь,

$$\partial_T A = 0 \quad \text{та} \quad \partial_T S = E. \quad (56)$$

Вони подібні до рівняння (14) і описують “стаціонарний стан” із заданим параметром E . Вимога “стаціонарності” додатково не накладається на квантову систему, але вона впливає з рівнянь квантової геометродинаміки (36) і (37). Тоді з рівнянь (45) і (46) ми приходимо до рівнянь

$$\partial_a (\rho v) = 0, \quad (57)$$

$$v^2 + U - E - Q = 0. \quad (58)$$

З рівняння (57), ми знаходимо густину ймовірності

$$\rho = \frac{\text{const}}{v}, \quad (59)$$

так, що квантовий потенціал набуває вигляду

$$Q = \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_a v}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial_a^2 v}{v}, \quad (60)$$

і його похідна по a стає рівною

$$\partial_a Q = 2 \frac{\partial_a v \partial_a^2 v}{v^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_a v}{v} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial_a^3 v}{v}. \quad (61)$$

Отже, позитивний квантовий потенціал приводить до швидшого розширення Всесвіту.

3.3. Напівкласичні приклади

Оскільки в стандартних фізичних одиницях потенціал $Q \sim \hbar^2$ [32] (порів. з рівнянням (18)), то рівняння (58) можна розв'язати за допомогою теорії збурень. У наближенні Борна ми отримуємо

$$Q = \frac{5}{16} \left(\frac{\partial_a U}{E - U} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial_a^2 U}{E - U}. \quad (62)$$

Розглянемо кілька конкретних прикладів.

3.3.1. Домінування випромінювання

Для такого всесвіту $E \neq 0$, $M = 0$, і $\kappa = 0$. Тоді $U = 0$, і квантовий доданок $Q = 0$. Цей результат узгоджується з результатом, отриманим раніше в роботі [34] за інших припущень.

3.3.2. Домінування матерії

У цьому випадку $E = 0$, $M \neq 0$, і $\kappa = 0$, тож ми маємо $U = -2aM$ і

$$Q = \frac{5}{16} \frac{1}{a^2}, \quad (63)$$

якщо $M = \text{const}$ (пил); якщо ж $\partial_a M \neq 0$ і $\partial_a^2 M \neq 0$, то

$$Q = \frac{\lambda(a)}{a^2}, \quad (64)$$

де

$$\lambda(a) = \frac{5}{16} \left(1 + a \frac{\partial_a M}{M} \right)^2 + \frac{a}{4} \frac{\partial_a M}{M} \left[2 + a \frac{\partial_a^2 M}{\partial_a M} \right] \quad (65)$$

є функцією зв'язку. Похідні від M визначають тиск

$$p_m = -\frac{2}{3a^2} \partial_a M \quad (66)$$

та його похідну

$$\partial_a p_m = \frac{4}{3a^3} \partial_a M - \frac{2}{3a^2} \partial_a^2 M. \quad (67)$$

РС параметри дорівнюють

$$w_B^{\text{dust}} = 1 \quad \text{та} \quad w_B = 1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln \lambda}{d \ln a} \quad (68)$$

для бомівських потенціалів (63) та (64), відповідно.

3.3.3. Просторово плоский

Всесвіт з випромінюванням і пилом

Для Всесвіту з $\kappa = 0$, $E \neq 0$, і $M = \text{const}$, ми знову отримуємо $U = -2aM$, і квантовий потенціал дорівнює

$$Q = \frac{5}{4} \left(\frac{M}{E + 2aM} \right)^2. \quad (69)$$

Цей вираз зводиться до рівняння (63) у випадку $E = 0$, і ми маємо $Q = \frac{5}{4} \left(\frac{M}{E} \right)^2$ у точці $a = 0$; отже квантовий потенціал є несингулярним.

РС параметр становить

$$w_B = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4aM}{E + 2aM} \right). \quad (70)$$

3.3.4. Порожній Всесвіт

із просторовою кривиною

Якщо $\kappa \neq 0$, $E = 0$, і $M = 0$, то ми отримуємо $U = \kappa a^2$ і

$$Q = \frac{3}{4} \frac{1}{a^2}, \quad w_B = 1. \quad (71)$$

Бачимо, що сама по собі просторова кривина може генерувати квантовий потенціал навіть у порожньому Всесвіті, незалежно від параметра кривини.

3.4. Вплив квантового потенціала на розширення

Рівняння (58) можна переписати у вигляді, зручному для порівняння із загальною теорією відносності, а саме

$$\left(\frac{v}{a^2} \right) = \rho_{\text{mat}} + \rho_B, \quad (72)$$

де

$$\rho_{\text{mat}} = \frac{2M}{a^3} + \frac{E}{a^4} - \frac{\kappa}{a^2} \quad (73)$$

– це повна густина енергії з внесками матерії з масою M , випромінювання, та доданка, що враховує кривизну простору, а

$$\rho_{\text{в}} = \frac{Q}{a^4} \quad (74)$$

– це густина енергії, зумовлена квантовим потенціалом Бома. Як бачимо, врахування квантового потенціалу може вплинути на швидкість розширення Хаббла $H = \frac{\dot{a}}{a}$ [34]. Рівняння (72) можна розглядати як квантовий аналог першого рівняння Фрідмана, тоді як рівняння (50) є рівнянням для прискорення $\frac{d^2 a}{dt^2}$ з квантовою поправкою та збігається з відповідним рівнянням однорідної ізотропної моделі [32].

Для ілюстрації зробимо кілька розрахунків.

У найпростішому випадку порожнього Всесвіту квантовий доданок має форму (71). Інтегруючи рівняння (58), ми отримуємо такі співвідношення: якщо $\kappa = 1$, то

$$e^{2T} = \left| a^2 + \sqrt{a^4 + \frac{3}{4}} \right|; \quad (75)$$

якщо $\kappa = -1$, то

$$T = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \text{ при } a < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$e^{2iT} = \left| a^2 + \sqrt{a^4 - \frac{3}{4}} \right| \text{ при } a > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (76)$$

Для значень $a \gg 1$, рівняння (75) і (76) скорочуються до виразів

$$a = \frac{e^T}{\sqrt{2}} \text{ для } \kappa = 1,$$

$$a = \frac{e^{iT}}{\sqrt{2}} \text{ для } \kappa = -1. \quad (77)$$

Ці ж вирази впливають із рівнянь загальної теорії відносності, якщо нехтувати квантовими ефектами.

Для просторово плаского Всесвіту, наповненого пилом і випромінюванням, квантовий доданок має

форму (69). Тоді з рівняння (58) випливає, що

$$\alpha T = \frac{2\sqrt{x^3+1}}{x+1+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{3^{\frac{1}{4}}} F(\varphi, k) - 2\sqrt{3} E(\varphi, k), \quad (78)$$

де

$$\alpha = \left(\frac{4M}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x = \frac{2aM+E}{\left(\frac{5}{4}M^2\right)^{\frac{1}{3}}}, \quad (79)$$

а $F(\varphi, k)$ і $E(\varphi, k)$ є еліптичними інтегралами першого та другого роду, відповідно, з

$$\varphi = \frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}}, \quad k = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}. \quad (80)$$

4. Обговорення

У цій статті ми проводимо аналогію між нерелятивістською квантовою механікою у формулюванні Маделунга та квантовою геометродинамікою для однорідної та ізотропної космологічної системи. У квантовій механіці можна перейти від вивчення частинки, що рухається в силовому полі, до опису ансамблю ідентичних частинок. Рівняння Шредингера можна звести до двох рівнянь гідродинамічного типу (11) і (12), одне з яких є стандартним рівнянням неперервності, а інше – рівнянням Ейлера для швидкості рідини, яка піддається дії додаткової сили через квантовий потенціал Бома (9). Ми обчислюємо цю додаткову силу на кількох прикладах потенціалів, які визначають рух рідини, та отримуємо координатну залежність квантового потенціалу.

Нааявність області руху рідини, де квантовий потенціал не дорівнює нулю, означає, що, згідно з рівнянням (12), рух рідини може значно відрізнятися від запропонованого класичною гідродинамікою. Зокрема, квантовий доданок може відповідати за виникнення дифракційної картини, коли частинка розсіюється на двох щілинах [38]. По суті, квантовий потенціал може бути заданий рівнянням (21), де виділяється сингулярність при малих значеннях координати, а безрозмірна функція зв'язку, строго кажучи, зберігає свою залежність від координати. З розглянутих прикладів можна, зокрема, зробити висновок про те, що якщо класичний потенціал є негативно визначеним, то при великих значеннях координати функція зв'язку стає

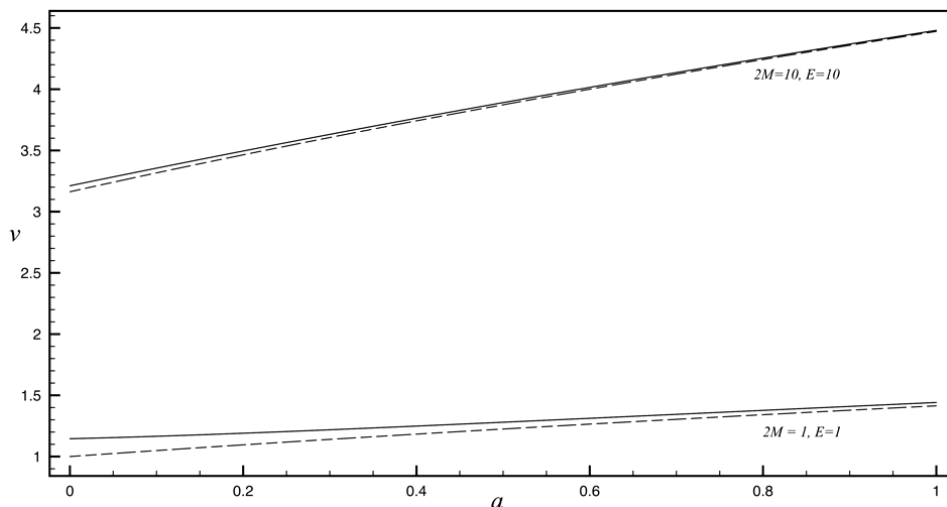


Рис. 1. Швидкість v як функція масштабного фактора a для різних значень параметрів M і E . Пунктирні лінії відповідають випадкам $Q = 0$

сталого величиною, а квантовий потенціал – обернено пропорційним до квадрату координати. При малих значеннях координати сам квантовий потенціал може ставати сталою величиною. Тільки в області, де градієнт квантового потенціалу обертається в нуль, він не впливає на швидкість рідини.

У квантовій геометродинаміці ми починаємо з рівнянь (36) і (37), які описують однорідний та ізотропний Всесвіт. Вектор стану $\Psi(a, \phi; T)$ розглядається як функція космічного масштабного фактора a , який визначає геометрію, однорідного скалярного поля ϕ , відповідального за матерію у Всесвіті, і параметра T , який описує еволюцію системи в конформному часі. Ці два рівняння можна звести до одного, залежного від часу рівняння (39) у розмірності $(2 + 1)$. Після усереднення за станами матеріального поля, рівняння (39) перетворюється на рівняння (42) у розмірності $(1 + 1)$. Потім, використовуючи пряму аналогію з квантовою механікою у формалізмі Маделунга, останнє рівняння можна переписати у вигляді двох рівнянь, (45) і (46), для амплітуди хвильової функції та її фази. Квантовий потенціал (47), який тут виникає, повністю аналогічний квантовому потенціалу Бома (9), за винятком того, що координата замінена масштабним фактором. На відміну від квантової механіки, де силове поле $V(x)$ визначається постановкою задачі, у геометродинаміці форма потенціальної функції (43) є специфічною. Після всіх кроків, рівняння (45) і (46) можна наре-

шту звести до двох рівнянь гідродинамічного типу (49) і (50).

У гідродинамічному підході швидкість потоку $v = \frac{da}{dT}$ є основною величиною, через яку виражається швидкість розширення Хаббла $H = \frac{1}{a^2} \frac{da}{dT}$.

Узагальнена сила \mathcal{F} (52), як і у випадку квантової механіки (див. рівняння (12)), містить додаткову силу, зумовлену градієнтом квантового потенціалу, що робить відповідні рівняння (50) нелінійними відносно поля швидкостей v . Подібно до квантової механіки, де нелінійні ефекти викликають дифракційну картину, відповідна інтерференція класичних траєкторій також має відбуватися в квантовій геометродинаміці, але наслідки для спостережень поки що залишаються незрозумілими.

Окремо варто відзначити перехід до так званих стаціонарних станів. На відміну від квантової механіки, вимога стаціонарності стану Всесвіту не накладається на квантову систему як додаткова умова, а впливає із самих рівнянь квантової геометродинаміки.

Явні форми квантового потенціалу в головному порядку борнівського наближення даються рівняннями (63)–(71) для всесвітів, де домінує той чи інший тип матерії.

Вплив квантового потенціалу Q на розширення Всесвіту демонструється у вигляді явних розв'язків (75)–(77) рівняння (58) у випадку порожнього Всесвіту з різними просторовими кривинами. Розв'язок для просторово плоского Всесвіту, на-

повненого пилом і випромінюванням, дається рівнянням (78).

Швидкість потоку v як функція від a показана на рис. 1 для просторово плаского Всесвіту, заповненого пилом і випромінюванням. Внесок квантового потенціалу (69) в еволюцію Всесвіту помітний лише при малих значеннях a . Варто зауважити, що в цій моделі швидкість потоку не є сингулярною в точці $a = 0$. Тривимірне зображення для функції $v = v(a, \varepsilon)$, де $\varepsilon = \frac{E}{2M}$, показано на рис. 2². Цей рисунок наведено лише для ілюстрації. Кожна точка на поверхні відповідає одному конкретному всесвіту з певними значеннями параметрів. Набір всесвітів має сингулярність при $v \rightarrow \infty$, коли $a = 0$ і $\varepsilon \rightarrow 0$. Для порівняння, на рис. 3 наведено випадок, коли квантові ефекти відсутні.

Якщо Всесвіт заповнений пилом і випромінюванням, то з рівнянь (72) та (69) ми отримуємо

$$v = a^2 \sqrt{\rho_m \left(1 + \frac{\rho_\gamma}{\rho_m}\right) + \frac{5}{16} \frac{1}{a^6} \left(1 + \frac{\rho_\gamma}{\rho_m}\right)^{-2}}. \quad (81)$$

Якщо матерія домінує над випромінюванням і $\frac{\rho_\gamma}{\rho_m} \ll 1$, то швидкість потоку v становить

$$v = a^2 \sqrt{\rho_m + \frac{5}{16} \frac{1}{a^6}}. \quad (82)$$

У епоху, коли випромінювання переважає над матерією і $\frac{\rho_\gamma}{\rho_m} \gg 1$, то маємо

$$v = a^2 \sqrt{\rho_\gamma + \frac{5}{16} \frac{1}{a^6} \left(\frac{\rho_m}{\rho_\gamma}\right)^2}. \quad (83)$$

В області значень a , де квантовими ефектами в рівнянні (82) можна знехтувати, ми переходимо до класичної границі, де застосовна загальна теорія відносності. Коли матерія домінує над випромінюванням, ми отримуємо

$$\frac{v}{a^2} = \sqrt{\rho_m}, \quad (84)$$

де $\frac{v}{a^2} = H$ – швидкість розширення Хаббла.

Якщо ми введемо в модель космологічну сталу Λ з густиною енергії ρ_Λ , то рівняння (84) набуває

² Різні значення ε для постійного внеску нерелятивістської матерії M відповідають всесвітам з різною густиною випромінювання.

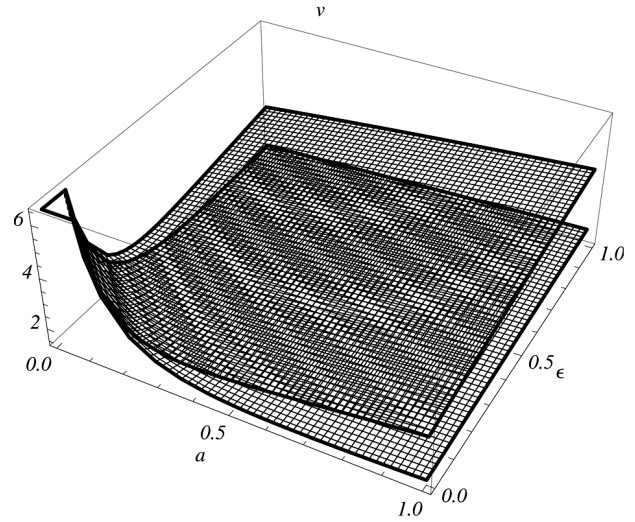


Рис. 2. Швидкість v як функція масштабного фактора a і параметра $\varepsilon = \frac{E}{2M}$. Нижня поверхня відповідає значенню $2M = 2$, а верхня $-2M = 10$

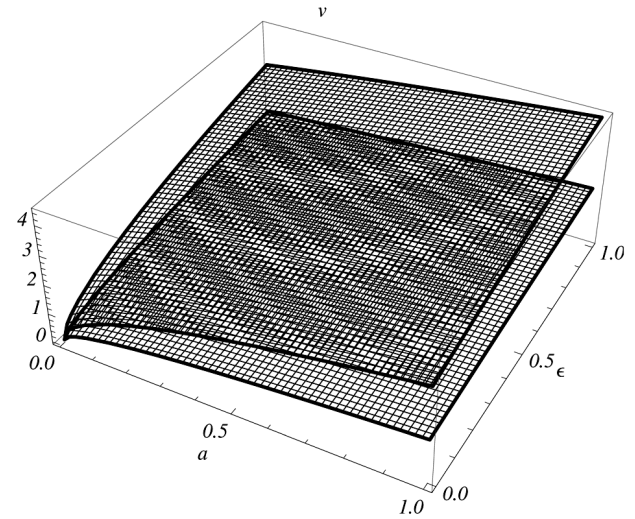


Рис. 3. Швидкість v як функція масштабного фактора a і параметра $\varepsilon = \frac{E}{2M}$ для різних значень M та $Q = 0$ (див. підпис до рис. 2)

вигляду

$$\frac{v}{a^2} = \sqrt{\rho_m + \rho_\Lambda}. \quad (85)$$

Для Всесвіту з $\rho_\Lambda \approx \rho_m$, порівнюючи рівняння (84) і (85), ми бачимо, що густина, пов'язана з космологічною сталою, збільшує швидкість розширення в $\sqrt{2}$ разів.

Випадок домінування випромінювання над матерією вимагає більш ретельного аналізу. Цілком можливо, що квантовим членом у рівнянні (83) не можна нехтувати, незважаючи на те, що він пропорційний другому степеню малого параметра $\frac{\rho_m}{\rho_\gamma}$, і все залежить від того, наскільки близько ми наблизимося до початкової космологічної сингулярності $a = 0$. З рівняння (83) випливає, що обидва доданки під квадратним коренем можна оцінити як пропорційні a^{-4} , і тоді v прямує до сталої величини.

Робота виконана за часткової підтримки Національної академії наук України (проекти N 0121U109612 та 0122U000886) та гранту від Фонду Саймонса (США).

1. E. Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.* **40**, 322 (1927).
2. E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Ann. Phys. (Leipzig)* **81**, 109 (1926).
3. D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I. *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
4. D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. II. *Phys. Rev.* **85**, 180 (1952).
5. T. Takabayasi. On the formulation of quantum mechanics associated with classical pictures. *Prog. Theor. Phys.* **8**, 143 (1952).
6. O. Halpern. A proposed re-interpretation of quantum mechanics. *Phys. Rev.* **87**, 389 (1952).
7. D. Bohm. Reply to a criticism of a casual re-interpretation of the quantum theory. *Phys. Rev.* **87**, 389 (1952).
8. D. Bohm. Comments on an article of Takabayasi concerning the formulation of quantum mechanics with classical pictures. *Prog. Theor. Phys.* **9**, 273 (1953).
9. D. Bohm, J.P. Vigier. Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations. *Phys. Rev.* **96**, 208 (1954).
10. H. Freistadt. The causal formulation of quantum mechanics of particles (the theory of De Broglie, Bohm and Takabayasi). *Nuovo Cimento* **5**, 1 (1957).
11. P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford Univ. Press, 1958).
12. M. Berry. Time-independent, paraxial and time-dependent Madelung trajectories near zeros. *J. Phys. A* **57**, 025201 (2024).
13. R.A. Leacock, M.J. Padgett. Hamilton-Jacobi theory and the quantum action variable. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 3 (1983).
14. R.A. Leacock, M.J. Padgett. Hamilton-Jacobi/action-angle quantum mechanics. *Phys. Rev. D* **28**, 2491 (1983).
15. C.-C. Chou, R.E. Wyatt. Computational method for the quantum Hamilton-Jacobi equation: One-dimensional scattering problems. *Phys. Rev. E* **74**, 066702 (2006).
16. C.-C. Chou, R.E. Wyatt. Computational method for the quantum Hamilton-Jacobi equation: Bound states in one dimension. *J. Chem. Phys.* **125**, 174103 (2006).
17. A. Bouda, A.M. Meziane. The three-dimensional quantum Hamilton-Jacobi equation and microstates. *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 1278 (2006).
18. A. Bouda. The quantum reduced action in higher dimensions. *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 913 (2009).
19. N. Rosen. The relation between classical and quantum mechanics. *Am. J. Phys.* **32**, 597 (1964).
20. G.E. Bowman. On the classical limit in Bohm's theory. *Found. Phys.* **35**, 605 (2005).
21. F. Gay-Balmaz, C. Tronci. Madelung transform and probability densities in hybrid quantum-classical dynamics. *Nonlinearity* **33**, 5383 (2020); arXiv:1907.06624.
22. S. Sonogo. Interpretation of the hydrodynamical formalism of quantum mechanics. *Found. Phys.* **21**, 1135 (1991).
23. E. Heifetz, R. Tsekov, E. Cohen, Z. Nussinov. On entropy production in the Madelung fluid and the role of Bohm's potential in classical diffusion. *Found. Phys.* **46**, 815 (2016).
24. E. Heifetz, E. Cohen. Toward a thermo-hydrodynamic like description of Schrödinger equation via the Madelung formulation and Fisher information. *Found. Phys.* **45**, 1514 (2015).
25. M. Reddiger. The Madelung picture as a foundation of geometric quantum theory. *Found. Phys.* **47**, 1317 (2017).
26. M. Reddiger, B. Poirier. Towards a mathematical theory of the Madelung equations. *J. Phys. A* **56**, 193001 (2023).
27. T.C. Wallstrom. Inequivalence between the Schrödinger equation and the Madelung hydrodynamic equations. *Phys. Rev. A* **49**, 1613 (1994).
28. P.A.M. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. R. Soc. Lond. A* **133**, 60 (1931).
29. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Course of Theoretical Physics, Vol. 3* (Pergamon Press, 1965).
30. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The expanding Universe: Change of regime. *Ukr. J. Phys.* **60**, 664 (2015).
31. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The Big Bang quantum cosmology: The matter-energy production epoch. *Acta Phys. Pol. B* **39**, 979 (2008). arXiv:0712.0464.
32. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Quantum corrections to the dynamics of the expanding universe. *Acta Phys. Pol. B* **44**, 2051 (2013). arXiv:1307.2383.
33. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The matter-energy intensity distribution in a quantum gravitational system. *Quantum Stud.: Math. Found.* **5**, 245 (2018).
34. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The Hubble tension from the standpoint of quantum cosmology. *Eur. J. Phys. C* **84**, 121 (2024). arXiv:2211.16394.
35. R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner. The dynamics of general relativity. In *Gravitation: An Introduction to Current Research. Edited by L. Witten* (Wiley, 1962). arXiv:gr-qc/0405109.

36. K.V. Kuchař, C.G. Torre. Gaussian reference fluid and interpretation of quantum geometrodynamics. *Phys. Rev. D* **43**, 419 (1991).
37. J.B. Brown, D. Marolf. On relativistic material reference systems. *Phys. Rev. D* **53**, 1835 (1996). arXiv:gr-qc/9509026.
38. C. Philippidis, C. Dewdney, B.J. Hiley. Quantum interference and the quantum potential. *Nuovo Cimento B* **52**, 15 (1979).

Одержано 22.03.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev

MINISUPERSPACE QUANTUM
COSMOLOGY IN THE MADELUNG–BOHM FORMALISM

An analogy between non-relativistic quantum mechanics in the Madelung formulation and quantum geometrodynamics in the

case of the maximally symmetric space is drawn. The equations equivalent to the continuity equation and the hydrodynamic Euler equation describing the evolution of the velocity introduced for the case of hypothetical fluid flow characterizing the cosmological system are obtained. It is shown that the perfect nature of the fluid is broken by the quantum Bohm potential. The quantum potential is calculated in the semi-classical approximation for different forces acting in the system both in standard quantum mechanics and in the minisuperspace model of quantum geometrodynamics. The explicit dependences of the cosmic scale factor on the conformal time, which account for the quantum additive, are found for the empty space with spatial curvature and for a spatially flat universe with dust and radiation.

Keywords: quantum theory, hydrodynamics, cosmology, geometrodynamics.